NOTAS DE ÁLGEBRA LINEAR

E

ELASTICIDADE FINITA

Alberto Luiz Coimbra

COPPE - U.F. do Rio de Janeiro

Algo permanece invariante

quando tudo parece mudar.

ÍNDICE

pag.

CAPÍTULO 1 - FUNÇÕES, GRUPOS DE FUNÇÕES

1.1 - Conceito de função 1
1.2 - Composição de funções, Restrição 3
1.3 - Grupo de funções inversíveis 4
1.4 - Classes de equivalência 8
1.5 - Morfismos 9
1.6 - Funções tensoriais 10

CAPÍTULO 2 - ESPAÇOS VETORIAIS

2.1 - Vetores espaciais 12
2.2 - Espaço pontual euclidiano 14
2.3 - Espaços tangentes de $\mathbb{E}$ 16
2.4 - Bases cartesianas 17
2.5 - Coordenadas de um ponto 19
2.6 - Subespaços de $\mathbb{E}$ 21

CAPÍTULO 3 - TRANSFORMAÇÕES LINEARES

3.1 - Tensor 23
3.2 - Componentes do tensor 24
3.3 - Espaço vetorial dos tensores 25
3.4 - Multiplicação de tensores 26
3.5 - Polinômios de um tensor 28
3.6 - Tensor inverso 29
3.7 - Tensor transposto 30
3.8 - Traço de um tensor 32
3.9 - Produto interno do espaço $\mathbb{L}$ 33
3.10 - Produto tensorial 34
3.11 - Base do espaço dos tensores 35
3.12 - Tensor projeção ortogonal 37
3.13 - Representação do tensor projeção ortogonal 39

pag.

CAPÍTULO 4 - TRANSFORMAÇÕES DE BASES

4.1 - Tensor ortogonal 41
4.2 - Transformações ortogonais de bases 42
4.3 - Exemplo de rotação e reflexão de bases 44
4.4 - Transformações afins 46
4.5 - Rotação dos componentes de um vetor 47
4.6 - Rotação e translação de bases 48
4.7 - Rotação dos componentes de um tensor 50
4.8 - Transformações arbitrárias de bases 51
4.9 - Definições equivalentes de um tensor 51
4.10 - Rotação de vetores e bases 53
4.11 - Deformações homogêneas 55
4.12 - Tensores semelhantes 57
4.13 - Componentes de tensores semelhantes 59
4.14 - Relações de semelhança 60

CAPÍTULO 5 - PRODUTO VETORIAL

5.1 - Produto vetorial 64
5.2 - Propriedades do produto vetorial 65
5.3 - Vetor de tensor antissimétrico 69
5.4 - Determinante de um tensor 71
5.5 - Tensor cofator 73
5.6 - Interpretação geométrica de det $\underset{\sim}{T}$ 74
5.7 - Orientação do produto vetorial 75

CAPÍTULO 6 - AUTOVALORES E AUTOVERSORES

6.1 - Polinômio anulador de um tensor 77
6.2 - Polinômio característico de um tensor 77
6.3 - Subespaços invariantes 81
6.4 - Autovalores e autoversores de um tensor 82
6.5 - Autoversores de tensores semelhantes 85

pag.

6.6 - Formas canônicas de um tensor 85
6.7 - Autovalores e autoversores de um tensor ortogonal 89
6.8 - Invariantes de um tensor ortogonal 91
6.9 - Parcela antissimétrica de um tensor ortogonal próprio 91
6.10 - Autovalores e autoversores de um tensor simétrico 93
6.11 - Tensores simétricos não-negativos 95
6.12 - Raiz quadrada de um tensor 96

CAPÍTULO 7 - DECOMPOSIÇÕES DE UM TENSOR

7.1 - Decomposição espectral de um tensor simétrico... 98
7.2 - Exemplos de determinação dos autovalores e autoversores de um tensor simétrico..... 100
7.3 - Decomposição tríplice de um tensor 104
7.4 - Representação de um tensor assimétrico 105
7.5 - Invariantes de um tensor esférico 106
7.6 - Invariantes de um tensor simétrico 107
7.7 - Invariantes de um tensor antissimétrico 108
7.8 - Invariantes de um tensor deviante 109
7.9 - Tensores proporcionais 111
7.10 - Conceito de invariante 112
7.11 - Invariantes escalares independentes de tensores 113
7.12 - Propriedades extremas de tensores simétricos ... 114
7.13 - Estado de cisalhamento puro 117
7.14 - Decomposição polar de um tensor 117
7.15 - Exemplo de decomposição polar 120
7.16 - Exemplo de decomposição tríplice 125

pag.

CAPÍTULO 8 - FUNÇÃO TENSORIAL $\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T})$

8.1 - Função tensorial isotrópica de um tensor 127
8.2 - Forma canônica de função tensorial isotrópica de um tensor simétrico 128
8.3 - Funções tensoriais analíticas 129
8.4 - Representação de $\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T})$ 132
8.5 - Desdobramento tríplice de $\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T})$ 135
8.6 - Efeito Poynting 137
8.7 - Representação quase-linear de função tensorial isotrópica 138
8.8 - Representação linear e homogênea de função tensorial isotrópica 139
8.9 - Relação entre tensor ortogonal próprio e tensor antissimétrico 140
8.10 - Existência de função tensorial isotrópica 143
8.11 - Dependência linear de vetores 147
8.12 - Dependência linear de tensores 149

CAPÍTULO 9 - FUNÇÕES TENSORIAIS

9.1 - Funções tensoriais 158
9.2 - Funções tensoriais lineares 162
9.3 - Tensores de quarta ordem 164
9.4 - Representação de formas lineares 165
9.5 - Representações de invariantes de um tensor simétrico 167
9.6 - Representações de funções tensoriais isotrópicas de um tensor, e um tensor e um vetor 169
9.7 - Representação de invariantes simultâneos 170

pag.

CAPÍTULO 10 - GRADIENTE DE FUNÇÕES TENSORIAIS

10.1 - Cálculo de funções tensoriais 172
10.2 - Aproximação linear 172
10.3 - Diferenciabilidade 174
10.4 - Derivadas de funções de argumento escalar 175
10.5 - Derivada de tensor ortogonal 177
10.6 - Movimento circular de uma partícula 178
10.7 - Derivada de funções tensoriais de valor escalar.. 181
10.8 - Gradiente e derivadas parciais de funções tensoriais de valor escalar 183
10.9 - Derivada direcional 185
10.10 - Gradientes dos momentos e dos invariantes principais 186
10.11 - Gradiente de invariantes de um tensor simétrico.. 188
10.12 - Isotropia da função gradiente 190
10.13 - Gradiente da deformação 190
10.14 - Derivadas parciais da deformação 192
10.15 - Divergência e rotacional da deformação 193
10.16 - Operador diferencial simbólico 194
10.17 - Gradiente de campo tensorial 195
10.18 - Divergência e rotacional de campos tensoriais.... 196
10.19 - Laplacianos de campos tensoriais 197
10.20 - Identidades de campos tensoriais 198
10.21 - Gradiente de função vetorial de um tensor 200
10.22 - Gradiente de função tensorial de um tensor 200

CAPÍTULO 11 - INTEGRAL DE CAMPOS TENSORIAIS

11.1 - Teoremas integrais de campos tensoriais 203
11.2 - Teorema de Stokes 206
11.3 - Campos tensoriais irrotacionais 207
11.4 - Campos tensoriais colenoidais 208
11.5 - Campos tensoriais harmônicos 209
11.6 - Teorema de Helmholtz 209

pag.

CAPÍTULO 12 - CONFIGURAÇÕES, DEFORMAÇÕES, MOVIMENTOS

12.1 - Corpo, configurações e deformações 211
12.2 - Configurações e deformações locais 213
12.3 - Movimento de um corpo 215
12.4 - Descrições substantiva, espacial e referencial de funções tensoriais 217
12.5 - Taxas de deformação 220
12.6 - Decomposição polar do gradiente da deformação... 225
12.7 - Descrição relativa 227
12.8 - Histórias 235

CAPÍTULO 13 - PROCESSOS DINÂMICOS

13.1 - Forças e tensões 237
13.2 - Balanço de forças 240
13.3 - Balanço de momentos 242
13.4 - Processo dinâmico 245
13.5 - Mudanças de referencial 246
13.6 - Interpretação física da mudança de referencial.. 248
13.7 - Transformações de funções tensoriais sob mudança de referencial 248
13.8 - Processos dinâmicos equivalentes 250
13.9 - Movimentos equivalentes 251
13.10 - Transformações de configurações e de deformações locais induzidas por mudança de referencial 254
13.11 - Densidade de massa 256
13.12 - Teorema do transporte 258
13.13 - Suposições constitutivas 261
13.14 - Indiferença referencial do material 267
13.15 - Transporte de energia e quantidade de movimento..... 268
13.16 - Balanço de energia 271
13.17 - Processo termodinâmico 274
13.18 - Constituição termodinâmica interna de um corpo.. 278

pag.

CAPÍTULO 14 - MATERIAIS ELÁSTICOS

14.1 - Função resposta elástica 280
14.2 - Simetria material, isotropia 283
14.3 - Funções resposta reduzidas 286
14.4 - Tensões e forças principais 291
14.5 - Equações diferenciais do movimento de corpos elásticos. Elasticidades 294
14.6 - Sólidos e fluidos elásticos 301
14.7 - Materiais elásticos incompressíveis 307
14.8 - Problemas de elasticidade finita 311
14.9 - Funções resposta termo-elásticas 314
14.10 - Mudanças de variáveis nas funções resposta termo-elásticas 321
14.11 - Funções resposta de materiais termo-elásticos referencialmente indiferentes 323
14.12 - Funções resposta de materiais termo-elásticos referencialmente indiferentes e isotrópicos..... 327

CAPÍTULO 15 - LINEARIZAÇÃO DA ELASTICIDADE

15.1 - Deslocamentos 330
15.2 - Deformações infinitesimais 331
15.3 - Deslocamentos rígidos infinitesimais 333
15.4 - Variação infinitesimal de volume 335
15.5 - Tensões nas deformações infinitesimais 336
15.6 - Equações constitutivas lineares 338
15.7 - Linearização da termo-elasticidade 343
15.8 - Cisalhamento simples 350
15.9 - Cisalhamento simples de material incompressível... 361
15.10 - Movimentos homogêneos de corpos elásticos homogêneos 363

BIBLIOGRAFIA 364

CAPÍTULO 1

FUNÇÕES, GRUPOS DE FUNÇÕES

1.1 - Conceito de função.

Chamamos de função, mapeamento, aplicação, operador ou transformação a um conjunto de pares ordenados

$$\mathfrak{F} = \{(x,y): x \in X,\ y \in Y,\ y = \mathfrak{F}(x)\} \tag{1.1.1}$$

Então, a função é definida por um conjunto X chamado de domínio, um conjunto Y chamado de contradomínio e uma regra de correspondência $\mathfrak{F}$ que associa a cada elemento $x \in X$ um único elemento $y \in Y$.

Usualmente a função é simbolizada por

$$\mathfrak{F}: X \to Y \tag{1.1.2}$$

e definida pela regra de correspondência

$$y = \mathfrak{F}(x) \tag{1.1.3}$$

também simbolizada por

$$\mathfrak{F}: x \to y. \tag{1.1.4}$$

Os elementos y e x são chamados, respectivamente, de valor e argumento da função. Comumente, empregamos para o conjunto (1.1.1) e para a regra de correspondência que é uma propriedade do conjunto, o mesmo nome função e o mesmo símbolo $\mathfrak{F}$. É usual também simbolizar a função pelo seu valor e escrever em vez de (1.1.3),

(1.1.5) $$y = y(x).$$

O conjunto de valores de uma função que, pode ser um subconjunto próprio do contradomínio, é chamado de imagem $\mathfrak{I}(X)$ da função.

Uma função é chamada de injetora se a diferentes argumentos correspondem diferentes valores mas nem todos elementos do contradomínio são valores da função. Uma função é sobrejetora se a imagem é igual ao contradomínio mas, a um valor podem corresponder mais de um argumento. Finalmente, uma função é chamada de bijetora quando é tanto injetora como sobrejetora, i.e., quando a imagem $\mathfrak{I}(X)$ é igual ao contradomínio Y e a um único argumento x corresponde um valor y.

Esses conceitos e definições podem ser estendidos as funções de mais de um argumento. Por exemplo, no caso de dois argumentos $x_1 \in X_1$ e $x_2 \in X_2$, a regra de correspondência (função)

(1.1.6) $$y = \mathfrak{I}(x_1, x_2),$$

simbolizada por

(1.1.7) $$\mathfrak{I}: X_1 \times X_2 = X \to Y,$$

associa com cada par (x_1, x_2) do domínio, produto cartesiano $X_1 \times X_2$, um elemento y do contradomínio Y. Se os dois argumentos x_1 e x_2 pertencem ao mesmo conjunto X, a função definida por (1.1.6) é simbolizada por

(1.1.8) $$\mathfrak{I}: X \times X = X^2 \to Y.$$

1.2 - Composição de funções, Restrição.

Consideremos duas funções $\mathfrak{F}_1 : X \to Y$ e $\mathfrak{F}_2 : Y \to Z$, definidas respectivamente por

$$y = \mathfrak{F}_1(x); \quad z = \mathfrak{F}_2(y).$$

A função $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_1 : X \to Z$, definida por

$$z = \mathfrak{F}_2(y) = \mathfrak{F}_2(\mathfrak{F}_1(x)) = \mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_1(x) = \mathfrak{F}(x), \tag{1.2.1}$$

é chamada de composição das funções e é representada pela operação associativa de multiplicação ou produto das funções. Em geral, essa multiplicação não é comutativa. É fácil verificar que se $\mathfrak{F}_1$ e $\mathfrak{F}_2$ são funções bijetoras, a multiplicação $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_1$ também é uma função bijetora.

Existe um tipo importante de funções em que o domínio e o contradomínio são um mesmo conjunto (X por exemplo). Para $y, x \in X$, essas funções, definidas por $y = \mathfrak{F}(x)$ são simbolizadas por

$$\mathfrak{F} : X \to X. \tag{1.2.2}$$

Se $y = x$, a função $I : X \to X$, definida por

$$x = I(x), \tag{1.2.3}$$

é chamada de função identidade.

Se a função (1.1.3) é bijetora, existe a chamada função inversa simbolizada por

$$\mathfrak{F}^{-1} : Y \to X, \tag{1.2.4}$$

e definida por

(1.2.5) $$x = \mathfrak{F}^{-1}(y).$$

De (1.1.3), (1.2.3) e (1.2.5) vemos que $x = \mathfrak{F}^{-1}(y) = \mathfrak{F}^{-1}(\mathfrak{F}(x)) = \mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{F}(x) = I(x) = x$, i.e.,

(1.2.6) $$\mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}\mathfrak{F}^{-1} = I.$$

É fácil verificar de (1.2.1) que

(1.2.7) $$(\mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_1)^{-1} = \mathfrak{F}_1^{-1}\,\mathfrak{F}_2^{-1}.$$

Consideremos as funções $\mathfrak{F}: X \to Y$ e $\mathfrak{F}_o: X_o \to Y_o$. Dizemos que $\mathfrak{F}_o$ é uma <u>restrição</u> de $\mathfrak{F}$ a X_o se X_o é um subconjunto de X e $\mathfrak{F}_o(x) = \mathfrak{F}(x)$ para cada x de X. Se $\mathfrak{F}_o$ é uma restrição de $\mathfrak{F}$, então Y_o é um subconjunto de Y.

Se X_o é um subconjunto de X e $\mathfrak{F}$ é uma função do tipo (1.2.2) então, dizemos que X_o é <u>invariante sob</u> $\mathfrak{F}$ se para cada $x \in X_o$ temos $\mathfrak{F}(x) \in X_o$, i.e., se $X_o \subset X$ é invariante sob $\mathfrak{F}: X \to X$ então $\mathfrak{F}$ <u>induz</u> uma função $\mathfrak{F}_o: X_o \to X_o$.

1.3 - <u>Grupo das funções inversíveis</u>.

O conjunto de funções inversíveis $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots,$ tem necessariamente as seguintes propriedades:

1. Com cada par ordenado de elementos do conjunto fica definido por (1.2.1) a operação chamada de multiplicação das funções que resulta em uma função que também pertence ao conjunto. Essa operação é associativa i.e.,

(1.3.1) $$\mathfrak{F}_1(\mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_3) = (\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2)\mathfrak{F}_3.$$

2. No conjunto existe a função identidade I, definida por (1.2.3), tal que

$$\mathfrak{F}I = I\mathfrak{F} = \mathfrak{F}. \tag{1.3.2}$$

3. Para todo elemento $\mathfrak{F}$ do conjunto existe a função inversa $\mathfrak{F}^{-1}$, definida por (1.2.5). Repetindo (1.2.6) temos

$$\mathfrak{F}\mathfrak{F}^{-1} = \mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{F} = I. \tag{1.3.3}$$

Dizemos que o conjunto das funções inversíveis tem a estrutura algébrica de um grupo multiplicativo, simbolizado por $\mathbb{G}_i$. É fácil verificar que funções compostas tais como $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_3$, $\mathfrak{F}_1^{-1}\mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_3\mathfrak{F}_2^{-1}$, etc., pertencem todas ao grupo $\mathbb{G}_i$. Em particular, a função

$$\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}_1\mathfrak{F}\mathfrak{F}_1^{-1} \tag{1.3.4}$$

é chamada de conjugada da função $\mathfrak{F}$ por meio da função $\mathfrak{F}_1$.

Uma parte de um grupo que tem as propriedades do grupo é chamada de sub-grupo do grupo dado. Se $\bar{\mathbb{G}}_i^*$ e $\bar{\mathbb{G}}_i$ são os subgrupos de $\mathbb{G}_i$ aos quais pertencem, respectivamente, $\mathfrak{F}^*$ e $\mathfrak{F}$ relacionados por (1.3.4), então

$$\bar{\mathbb{G}}_i^* = \mathfrak{F}_1\,\bar{\mathbb{G}}_1\,\mathfrak{F}_1^{-1} \tag{1.3.5}$$

simboliza a transformação por $\mathfrak{F}_1 \in \mathbb{G}_i$ de um subrupo no outro. Dizemos que os subgrupos $\bar{\mathbb{G}}_i^*$ e $\bar{\mathbb{G}}_i$ são conjugados um do outro por meio da função inversível $\mathfrak{F}_1$.

Se para qualquer função $\mathfrak{F}_1 \in \mathbb{G}_i$ um subgrupo $\bar{\mathbb{G}}_i \subset \mathbb{G}_i$ é idêntico a todos os seus subgrupos conjugados, então

$$\bar{\mathbb{G}}_i = \mathfrak{F}_1\,\bar{\mathbb{G}}_i\,\mathfrak{F}_1^{-1} \tag{1.3.6}$$

ou

(1.3.7) $$\bar{\mathbb{G}}_i \, \mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_1 \, \bar{\mathbb{G}}_i .$$

Dizemos que $\bar{\mathbb{G}}_i$ é um subgrupo invariante ou subgrupo autoconjugado de $\mathbb{G}_i$. A expressão (1.3.6) significa que para todas as funções $\mathfrak{F}_1$ de $\mathbb{G}_i$ e $\mathfrak{F}$ de $\bar{\mathbb{G}}_i \subset \mathbb{G}_i$, a função $\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F} \mathfrak{F}_1^{-1}$ também é um elemento de $\bar{\mathbb{G}}_i$ mas, não significa que necessariamente $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \mathfrak{F} \mathfrak{F}_1^{-1}$ para todo $\mathfrak{F} \in \bar{\mathbb{G}}_i$. Em (1.3.7) mostramos que o subgrupo invariante $\bar{\mathbb{G}}_i \subset \mathbb{G}_i$ comuta com todo elemento $\mathfrak{F}_1 \in \mathbb{G}_i$.

Se as funções $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_m$ pertencem a um grupo $\mathbb{G}_i$, o conjunto de todas as funções obtidas multiplicando entre elas essas funções e suas inversas é um subgrupo de $\mathbb{G}_i$ chamado de subgrupo gerado pelas funções $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_m$, e essas funções são chamadas de geradoras do subgrupo.

Um subgrupo gerado por uma única função $\mathfrak{F}$ é chamado de cíclico e seus elementos são as funções

$$I, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}\mathfrak{F}, \mathfrak{F}\mathfrak{F}\mathfrak{F}, \ldots, \mathfrak{F}^{-1}, \mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{F}^{-1}, \mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{F}^{-1}, \ldots$$

Essas funções são chamadas naturalmente de potências de $\mathfrak{F}$, pois,

(1.3.8) $$I = \mathfrak{F}^0, \ \mathfrak{F} = \mathfrak{F}^1, \ \mathfrak{F}^2 = \mathfrak{F}\mathfrak{F}, \ldots, \mathfrak{F}^{-2} = \mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{F}^{-1}, \ldots .$$

É fácil verificar que

(1.3.9) $$\mathfrak{F}^m \mathfrak{F}^n = \mathfrak{F}^n \mathfrak{F}^m = \mathfrak{F}^{m+n},$$

e que

(1.3.10) $$(\mathfrak{F}^m)^n = \mathfrak{F}^{mn}.$$

Um grupo em que todos os elementos comutam uns com os outros é chamado de grupo comutativo ou abeliano.

Os grupos cíclicos são abelianos porque as potências de uma mesma função sempre comutam umas com as outras. Uma função é chamada de periódica quando uma sua potência positiva é a função identidade, i.e., quando

$$\mathfrak{F}^m = I. \tag{1.3.11}$$

O menor expoente positivo m que satisfaz (1.3.11) é chamado de ordem da função. Dizemos que uma função não-periódica é de ordem infinita.

Em um grupo comutativo ou abeliano a operação binária que define o grupo é usualmente representada por uma soma de funções. Nesse caso, a associatividade e a comutatividade da operação são expressas, respectivamente, por

$$(\mathfrak{F}_1+\mathfrak{F}_2) + \mathfrak{F}_3 = \mathfrak{F}_1+(\mathfrak{F}_2 + \mathfrak{F}_3), \tag{1.3.12}$$

$$\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_2 + \mathfrak{F}_1, \tag{1.3.13}$$

o elemento identidade é definido por

$$\mathfrak{F} + 0 = 0 + \mathfrak{F} = \mathfrak{F}, \tag{1.3.14}$$

e o elemento inverso por

$$\mathfrak{F} + (-\mathfrak{F}) = (-\mathfrak{F}) + \mathfrak{F} = 0. \tag{1.3.15}$$

O grupo G_i é então chamado de grupo aditivo.

A operação binária que confere estrutura algébrica de grupo abstrato ou geral a um conjunto de elementos, deve satisfazer a relações como (1.3.1), (1.3.2) e (1.3.3), formuladas como axiomas. Representar a operação abstrata como multiplicação,

soma ou qualquer outra operação concreta e, caracterizar a natureza dos elementos do conjunto, é tornar concreto um grupo abstrato. Há entretanto um teorema que demonstra que todo grupo é isomorfo a algum grupo de funções bijetoras do conjunto de seus elementos, i.e., todo grupo abstrato pode ser considerado como um grupo de funções bijetoras de um conjunto sobre ele mesmo.

Chamamos de trivial a um grupo formado por um único elemento. Um grupo pode conter um número finito ou infinito de elementos. O que possui um número finito de elementos é chamado de grupo finito e o número de elementos é chamado de ordem do grupo. O outro é chamado de grupo infinito.

1.4 - Classes de equivalência.

Os elementos conjugados definidos por (1.3.4) têm as seguintes propriedades:

1. Propriedade reflexiva. Qualquer elemento de $\mathbb{G}_i$ é o seu próprio conjugado, pois,

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}\mathfrak{F}\mathfrak{F}^{-1}. \tag{1.4.1}$$

2. Propriedade simétrica. Se $\mathfrak{F}^*$ é conjugado de $\mathfrak{F}$ então $\mathfrak{F}$ é conjugado de $\mathfrak{F}^*$, pois,

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^{-1}\,\mathfrak{F}^*\,\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^{-1}\,\mathfrak{F}\,(\mathfrak{F}^{-1})^{-1}. \tag{1.4.2}$$

3. Propriedade transitiva. Dois elementos conjugados a um terceiro são conjugados entre si. De fato, se $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}_1\,\mathfrak{F}\,\mathfrak{F}_1^{-1}$

e $\mathfrak{F}^{**} = \mathfrak{F}_2\ \mathfrak{F}\ \mathfrak{F}_2^{-1}$, então, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_2^{-1}\ \mathfrak{F}^{**}\ \mathfrak{F}_2$ e,

(1.4.3) $\mathfrak{F}^{*} = (\mathfrak{F}_1\ \mathfrak{F}_2^{-1})\ \mathfrak{F}^{**}\ (\mathfrak{F}_2\ \mathfrak{F}_1^{-1}) = (\mathfrak{F}_1\ \mathfrak{F}_2^{-1})\ \mathfrak{F}^{**}(\mathfrak{F}_1\ \mathfrak{F}_2^{-1})^{-1}$.

Essas propriedades mostram que todos os elementos de um grupo se dividem em classes distintas de elementos conjugados que, são um exemplo de classes de equivalência de elementos abstratos. Se o grupo é comutativo, i.e., se $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_1$ para todos os elementos $\mathfrak{F}_1$ e $\mathfrak{F}_2$, os elementos conjugados coincidem e toda classe de elementos conjugados consiste de um único elemento.

1.5 - Morfismos.

Se em (1.1.2) os conjuntos X e Y estão munidos de estruturas algébricas, i.e., se com os elementos de cada um desses conjuntos definimos uma ou mais operações, a função (regra de correspondência) (1.1.3) que não altera as estruturas de X e de Y é chamada de morfismo ou de homomorfismo.

Um morfismo bijetor é chamado de isomorfismo. Dizemos que há um isomorfismo entre os elementos $x \in X$ e $y = \mathfrak{F}(x) \in Y$ e entre X e Y ou que x e y e, X e Y são isomorfos.

Um isomorfismo do tipo (1.2.2) em que o domínio e o contradomínio da função são o mesmo conjunto é chamado de endomorfismo e, um endomorfismo bijetor é um automorfismo.

Exemplos de estruturas algébricas são as de um grupo, as de um espaço vetorial (euclidiano ou não) e as de uma álgebra.

1.6 - Funções tensoriais.

As funções tensoriais ou funções vetoriais são funções em geral não-lineares, simbolizadas por

$$\underset{\sim}{\mathfrak{F}}: D_{\mathbb{X}} \to \mathbb{Y}, \tag{1.6.1}$$

onde o domínio $D_{\mathbb{X}}$ é um subconjunto de um espaço vetorial $\mathbb{X}$ e a imagem $\mathbb{Y} = \underset{\sim}{\mathfrak{F}}(D_{\mathbb{X}})$ também é um espaço vetorial. Simbolizamos por

$$\underset{\sim}{\Psi} \in \underset{\sim}{\mathfrak{F}}(D_{\mathbb{X}}) \tag{1.6.2}$$

os elementos $y = \underset{\sim}{\Psi}$ da imagem $\underset{\sim}{\mathfrak{F}}(D_{\mathbb{X}})$.

Os elementos de $\mathbb{X}$ e de $\mathbb{Y}$ chamados coletivamente de tensores ou vetores (ou de pontos) podem ser escalares (tensores de ordem zero), vetores (tensores de primeira ordem) e, tensores de segunda ou maior ordem (ou pontos).

Segundo o seu valor $\underset{\sim}{\Psi}$, as funções tensoriais são chamadas de funções escalares, vetoriais, pontuais ou tensoriais (de segunda ou maior ordem). A especificação do argumento completa a identificação da função quanto a ordem tensorial.

Se $\mathbb{X}$ é um espaço pontual euclidiano $\mathbb{E}$, a função

$$\underset{\sim}{\mathfrak{F}}: D_{\mathbb{E}} \to \mathbb{Y}, \tag{1.6.3}$$

cujos argumentos são pontos, é chamada de campo tensorial ou de campo vetorial. Como exemplos temos o campo escalar ($\mathbb{Y} = \mathbb{R}$, $\underset{\sim}{\mathfrak{F}} = f$), o campo vetorial ($\mathbb{Y} = \mathbb{R}^3$, $\underset{\sim}{\mathfrak{F}} = \underset{\sim}{f}$) e o campo tensorial ($\mathbb{Y} = \mathbb{R}^9$, $\underset{\sim}{\mathfrak{F}} = \underset{\sim}{F}$).

Se $\mathbb{Y} = \mathbb{E}$ ($\underset{\sim}{\Psi} = \underset{\sim}{x}$), o campo pontual

(1.6.4) $\underset{\sim}{\chi}: D_{\mathbb{E}} \to \mathbb{E}$

definido em $\underset{\sim}{x} \in D_{\mathbb{E}}$ por

(1.6.5) $\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{\chi}(\underset{\sim}{x})$,

é chamado de deformação do espaço.

CAPÍTULO 2

ESPAÇOS VETORIAIS

2.1 - Vetores espaciais.

Os vetores espaciais ou vetores geométricos $\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{b},\ldots$, $\underset{\sim}{u},\underset{\sim}{v},\ldots$, são os vetores livres da geometria tridimensional cujo conjunto possui a estrutura de um espaço vetorial (concreto) simbolizado por $\mathbf{V}$. Esses vetores são caracterizados por segmentos de reta orientados (setas) com exceção do vetor zero cujo comprimento é nulo e cuja orientação é arbitrária.

A igualdade de dois vetores espaciais requer o mesmo comprimento e a mesma orientação sendo iguais dois vetores que diferem somente de uma translação em $\mathbf{V}$.

A soma de vetores espaciais, definida pela diagonal do paralelogramo (Fig. 2.1.1) obedece as seguintes regras que são as mesmas de um grupo aditivo:

$$(2.1.1)\qquad \begin{cases} \underset{\sim}{u} + (\underset{\sim}{v}+\underset{\sim}{w}) = (\underset{\sim}{u}+\underset{\sim}{v}) + \underset{\sim}{w}, & \text{associativo} \\ \underset{\sim}{u} + \underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{v} + \underset{\sim}{u}, & \text{comutativo} \\ \underset{\sim}{v} + \underset{\sim}{0} = \underset{\sim}{v}, & \text{elemento identidade} \\ \underset{\sim}{v} + (-\underset{\sim}{v}) = \underset{\sim}{v} - \underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{0}. & \text{inverso} \end{cases}$$

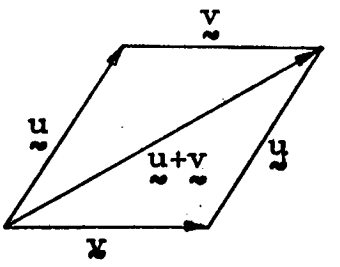

Fig. 2.1.1 - Soma de vetores de $\mathbf{V}$.

A multiplicação por escalar é a multiplicação de um vetor $\underset{\sim}{v}$ por um número real $a \in \mathbb{R}$, definida de tal modo que o comprimento do vetor é multiplicado por $|a|$ enquanto que a sua orientação não se altera se $a > 0$ e é invertida se $k < 0$. Para $a,b \in \mathbb{R}$, essa operação concreta obedece as seguintes regras:

$$(2.1.2) \qquad \begin{cases} a(b\underset{\sim}{v}) = ab\underset{\sim}{v}, & \text{associativo} \\ \underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{v}, & \text{identidade} \\ (a+b)\underset{\sim}{v} = a\underset{\sim}{v} + b\underset{\sim}{v}, & \text{distributivo relação adição esc} \\ a(\underset{\sim}{u}+\underset{\sim}{v}) = a\underset{\sim}{u} + a\underset{\sim}{v}. & \text{" vet} \end{cases}$$

O produto interno ou produto escalar de dois vetores espaciais é o número real dado por

$$(2.1.3) \qquad \underset{\sim}{u}\cdot\underset{\sim}{v} = \|\underset{\sim}{u}\|\|\underset{\sim}{v}\| \cos(\underset{\sim}{u},\underset{\sim}{v}),$$

onde

$$(2.1.4) \qquad \|\underset{\sim}{v}\| = +\sqrt{\underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{v}} = +\sqrt{\underset{\sim}{v}^2},$$

é a magnitude, comprimento ou módulo de $\underset{\sim}{v}$ e $\cos(\underset{\sim}{u},\underset{\sim}{v})$ é o coseno do ângulo subentendido por $\underset{\sim}{u}$ e $\underset{\sim}{v}$. Essa operação concreta satisfaz as seguintes regras:

$$(2.1.5) \qquad \begin{cases} \underset{\sim}{u}\cdot\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{u}, & \text{comutativo} \\ \underset{\sim}{u}\cdot(\underset{\sim}{v}+\underset{\sim}{w}) = \underset{\sim}{u}\cdot\underset{\sim}{v} + \underset{\sim}{u}\cdot\underset{\sim}{w}, & \text{distributivo relação adição vet} \\ a(\underset{\sim}{u}\cdot\underset{\sim}{v}) = a\underset{\sim}{u}\cdot\underset{\sim}{v}, & \text{associativo escalar} \\ \underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{v} > 0 \text{ se } \underset{\sim}{v} \neq \underset{\sim}{0}. & \text{positivo definido} \end{cases}$$

Consideramos um espaço vetorial V concreto de vetores seta que tem a estrutura de um espaço euclidiano que lhe é dada pelo produto interno (2.1.3). Se $a \in \mathbb{R}$, então,

(2.1.6) $$\|a\underset{\sim}{v}\| = \sqrt{a\underset{\sim}{v}\cdot a\underset{\sim}{v}} = \sqrt{a^2\underset{\sim}{v}^2} = |a|\|\underset{\sim}{v}\|,$$

i.e., a multiplicação de um vetor por um escalar multiplica o módulo do vetor pelo módulo do escalar. Um vetor cujo módulo é 1 é chamado de versor ou de vetor normalizado. De acordo com (2.1.6) a normalização de um vetor é obtida multiplicando-o pelo inverso de seu módulo.

2.2 - Espaço pontual euclidiano.

Matematicamente, chamamos de espaço a um conjunto infinito E de elementos $\underset{\sim}{x}$, $\underset{\sim}{y}$, $\underset{\sim}{z}$,... chamados de pontos. O elemento ponto de E generaliza o conceito intuitivo de ponto que assinala uma posição ou um lugar no espaço geométrico tridimensional V.

O conjunto E não é um espaço vetorial porque não existem as operações de soma de pontos e multiplicação de ponto por escalar. Entretanto podemos definir com os pontos de E uma operação chamada de diferença pontual que associa com dois pontos quaisquer $\underset{\sim}{x}$ e $\underset{\sim}{y}$ sem vetor $\underset{\sim}{v}$, i.e.,

(2.2.1) $$\underset{\sim}{y} - \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{v}.$$

Esse vetor também chamado de diferença pontual é representado por uma seta que parte do ponto $\underset{\sim}{x}$ e termina no ponto $\underset{\sim}{y}$ (Fig. 2.2.1)

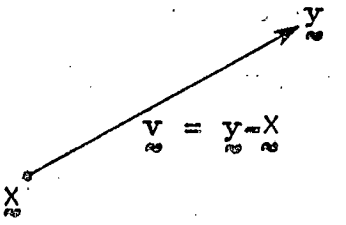

Fig. 2.2.1 - Vetor diferença pontual.

A operação diferença pontual obedece as seguintes regras:

$$(2.2.2) \qquad \begin{cases} (\underset{\approx}{y}-\underset{\approx}{x}) + (\underset{\approx}{x}-\underset{\approx}{z}) = (\underset{\approx}{y}-\underset{\approx}{z}), \\ \\ \underset{\approx}{y} = \underset{\approx}{x} + \underset{\approx}{v} = \underset{\approx}{v} + \underset{\approx}{x} \end{cases}$$

A regra $(2.2.2)_2$ define univocamente um ponto como uma soma de um vetor com outro ponto. Se os dois pontos coincidem a diferença portual é o vetor zero, i.e.,

$$(2.2.3) \qquad \underset{\approx}{x} - \underset{\approx}{x} = \underset{\approx}{0}.$$

A distância entre dois pontos é definida por

$$(2.2.4) \qquad \|\underset{\approx}{y}-\underset{\approx}{x}\| = \sqrt{(\underset{\approx}{y}-\underset{\approx}{x})\cdot(\underset{\approx}{y}-\underset{\approx}{x})}.$$

O que chamamos de espaço pontual euclidiano $\mathbb{E}$ é um conjunto de pontos, cada par dos quais define um vetor seta de $\mathbb{V}$. As setas de $\mathbb{V}$ e ainda mais os pontos de $\mathbb{E}$, servem apenas para tornar concretos os objetos (vetores) de espaços vetoriais abstratos. Esses espaços abstratos são definidos somente pelas regras (2.1.1) e (2.1.2) (e também (2.1.5) quando euclidianos) formuladas como axiomas que definem duas (ou três) operações abstratas com os seus elementos abstratos chamados de vetores.

2.3 - Espaços tangentes de $\mathbb{E}$.

Um vetor tangente ou vetor de translação $\underset{\sim}{v}_{\underset{\sim}{X}}$ de $\mathbb{E}$ é um par

$$\underset{\sim}{v}_{\underset{\sim}{X}} = (\underset{\sim}{X}, \underset{\sim}{v}) \in \mathbb{E}\times V, \tag{2.3.1}$$

onde $\underset{\sim}{X}$ é o ponto de aplicação e $\underset{\sim}{v}$ é a parte vetorial de $\underset{\sim}{v}_{\underset{\sim}{X}}$. Esse vetor pode ser representado por uma seta com origem em $\underset{\sim}{X}$ e extremidade no ponto $\underset{\sim}{X} + \underset{\sim}{v}$ (Fig. 2.3.1).

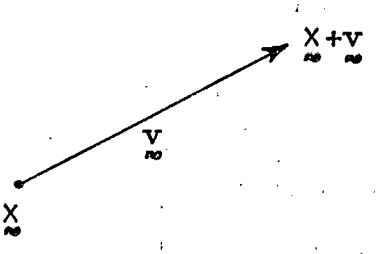

Fig. 2.3.1 - Vetor tangente $\underset{\sim}{v}_{\underset{\sim}{X}}$.

O conjúnto de vetores, $\mathbb{E}_{\underset{\sim}{X}}$, que tem $\underset{\sim}{X}$ como ponto de aplicação é um espaço vetorial chamado de espaço tangente ou de espaço de translação de $\mathbb{E}$ em $\underset{\sim}{X}$. O espaço $\mathbb{E}$ possui distintos espaços em cada um dos seus pontos.

Dois vetores tangentes $\underset{\sim}{u}_{\underset{\sim}{X}}$ e $\underset{\sim}{v}_{\underset{\sim}{y}}$ são iguais se e apenas se eles têm o mesmo ponto de aplicação $\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{X}$ e a mesma parte vetorial $\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{v}$. Os vetores tangentes que têm a mesma parte vetorial mas pontos de aplicação diferentes são chamados de paralelos. Os vetores tangentes são chamados de vetores ligados e os vetores espaciais são vetores livres.

A estrutura de $\mathbb{E}_{\underset{\sim}{X}}$ é definida pelas regras

$$(2.3.2) \qquad \begin{cases} \underset{\approx}{u}_X + \underset{\approx}{v}_X = (\underset{\approx}{u}+\underset{\approx}{v})_X = (X, \underset{\approx}{u}+\underset{\approx}{v}) \\ a(\underset{\approx}{v}_X) = (a\underset{\approx}{v})_X = (X, a\underset{\approx}{v}), \\ \underset{\approx}{u}_X \cdot \underset{\approx}{v}_X = \underset{\approx}{u}\cdot\underset{\approx}{v} = (X, \underset{\approx}{u}\cdot\underset{\approx}{v}), \end{cases}$$

para quaisquer $\underset{\approx}{u}_X = (X, \underset{\approx}{u})$ e $\underset{\approx}{v}_X = (X, \underset{\approx}{v})$ de $\mathbb{E}$ e $a \in \mathbb{R}$.

Em cada ponto de $\mathbb{E}$ existe um isomorfismo entre os vetores tangentes e os vetores espaciais, i.e., dizemos que $\mathbb{E}$ e $\mathbb{V}$ são espaços vetoriais isomorfos. O isomorfismo entre

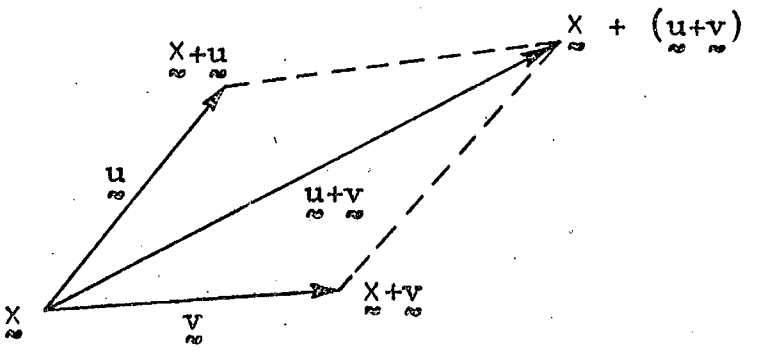

Fig. 2.3.2 - Soma de vetores tangentes de $\mathbb{E}_X$.

o espaço concreto $\mathbb{E}$ (ou $\mathbb{E}_X$) de pontos e vetores ligados e o espaço concreto $\mathbb{V}$ de vetores livres, é uma função bijetora que não modifica as propriedades geométricas desses espaços vetoriais.

2.4 - Bases cartesianas.

Uma <u>base cartesiana</u> do espaço $\mathbb{V}$ é um conjunto ordenado $\mathbb{B} = \{\underset{\approx}{e}_i\}$ de três versores mutuamente ortogonais $\underset{\approx}{e}_1$, $\underset{\approx}{e}_2$

e $\underset{\sim}{e}_3$. Em relação a essa base, qualquer vetor espacial $\underset{\sim}{v}$ pode ser representado univocamente pela combinação linear

$$(2.4.1) \qquad \underset{\sim}{v} = v_i \underset{\sim}{e}_i = v_1 \underset{\sim}{e}_1 + v_2 \underset{\sim}{e}_2 + v_3 \underset{\sim}{e}_3 ,$$

onde os três números reais v_i, coeficientes da combinação linear, são os componentes de $\underset{\sim}{v}$.

Sendo ortonormal, a base cartesiana tem a propriedade expressa por

$$(2.4.2) \qquad \underset{\sim}{e}_i \cdot \underset{\sim}{e}_j \triangleq \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j, \\ 1 & \text{se } i = j, \end{cases} \quad (i,j = 1,2,3),$$

onde δ_{ij} simboliza o delta de Kronecker. Os componentes de $\underset{\sim}{v}$ na base $\mathbb{B}$ são dados por

$$(2.4.3) \qquad \underset{\sim}{v} \cdot \underset{\sim}{e}_i = v_j \underset{\sim}{e}_j \cdot \underset{\sim}{e}_i = v_j \delta_{ij} = v_i .$$

Em relação a $\mathbb{B}$, o produto interno de dois vetores $\underset{\sim}{u}$ e $\underset{\sim}{v}$ é dado por

$$(2.4.4) \qquad \underset{\sim}{u} \cdot \underset{\sim}{v} = u_i v_j \, \underset{\sim}{e}_i \cdot \underset{\sim}{e}_j = u_i \, v_j \, \delta_{ij} = u_i v_i .$$

O conjunto ordenado dos três componentes de um vetor espacial $\underset{\sim}{v}$ pode ser considerado como um vetor de $\mathbb{R}^3$, espaço vetorial dos conjuntos ordenados de três números reais. Existe um isomorfismo entre os vetores $(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ e os vetores $\underset{\sim}{v} \in \mathbb{V}$.

No espaço pontual $\mathbb{E}$ cada ponto pode ser ponto de aplicação, chamado de origem $\underset{\sim}{O}$, dos três versores base $\underset{\sim}{e}_i$ que constituem então uma base cartesiana de versores tangentes $(\underset{\sim}{O}, \underset{\sim}{e}_i)$, simbolizada por $B_{\underset{\sim}{O}} = \{(\underset{\sim}{O}, \underset{\sim}{e}_i)\} = \{\underset{\sim}{e}_i\}_{\underset{\sim}{O}}$, (Fig. 2.4.1).

Os pontos de E são assinalados em relação a origem $\underset{\sim}{0}$ por vetores tangentes

(2.4.5) $$\underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{0},$$

chamados de raios vetores.

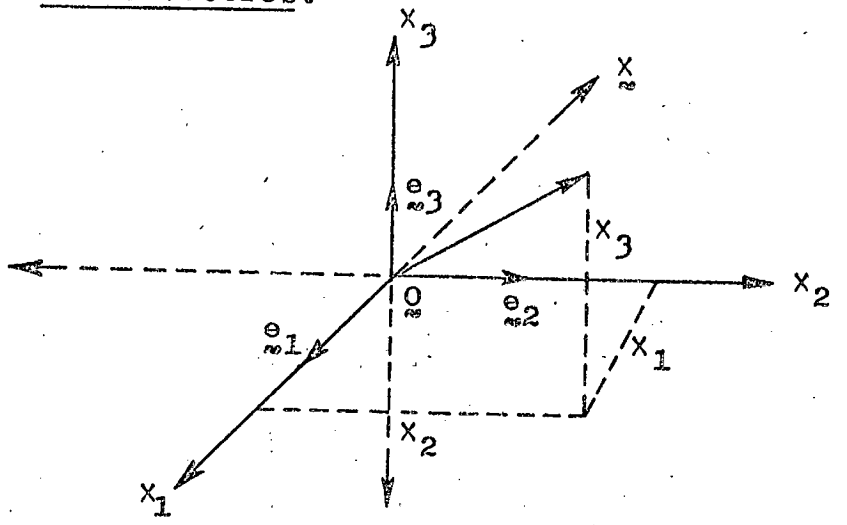

Fig. 2.4.1 - Base cartesiana $\mathbb{B}_{\underset{\sim}{0}} = \{\underset{\sim}{e}_i\}_{\underset{\sim}{0}}$ no ponto $\underset{\sim}{0}$ de $\mathbb{E}$.

Um espaço pontual enclidiano $\mathbb{E}$ cujos pontos são todos origens de uma base cartesiana é chamado de espaço cartesiano.

2.5 - Coordenadas de um ponto.

As coordenadas x_i de um ponto $\underset{\sim}{x} \in \mathbb{E}$ são os três campos escalares,

(2.5.1) $$x_i = x_i(\underset{\sim}{x}),$$

que definem a função $x_i : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$. Dizemos que cada uma dessas funções representa um eixo de coordenadas; duas delas em plano de coordenadas e o conjunto das três funções, $\{x_i\} = \{x_1, x_2, x_3\}$

representa um sistema de coordenadas. Inversamente, a função pontual de três argumentos escalares, $\underset{\sim}{x}: \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{E}$, definida por

$$\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{x}(x_1,x_2,x_3) = \underset{\sim}{x}(x_i), \tag{2.5.2}$$

relaciona cada ponto $\underset{\sim}{x}$ com as suas coordenadas x_i.

Existe um isomorfismo entre os pontos $\underset{\sim}{x} \in \mathbb{E}$ e os conjuntos ordenados de três números reais $\{x_1,x_2,x_3\}$, que são vetores (x_1,x_2,x_3) de $\mathbb{R}^3$, i.e., os espaços vetoriais $\mathbb{E}$ e $\mathbb{R}^3$ são isomorfos. O isomorfismo que existe entre $\mathbb{V}$, $\mathbb{E}$ e $\mathbb{R}^3$, permite lançar mão de setas ligadas, pontos e coordenadas para concretizar as setas livres de $\mathbb{V}$, pois, todos esses espaços vetoriais têm as mesmas propriedades geométricas. Na base $\mathbb{B}_{\underset{\sim}{o}}$ (Fig. 2.4.1) as coordenadas cartesianas x_1, x_2 e x_3 do ponto $\underset{\sim}{x}$ são iguais aos componentes r_i do raio vetor $\underset{\sim}{r}$, i.e.,

$$\underset{\sim}{r}\cdot\underset{\sim}{e}_i = (\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{0})\cdot\underset{\sim}{e}_i = r_i = x_i \tag{2.5.3}$$

Então, um ponto $\underset{\sim}{x}$ pode ser expresso por

$$\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0} + x_i\underset{\sim}{e}_i = \underset{\sim}{0} + x_1\underset{\sim}{e}_1 + x_2\underset{\sim}{e}_2 + x_3\underset{\sim}{e}_3. \tag{2.5.4}$$

Os eixos, planos e sistemas de coordenadas podem ser simbolizados pelas funções x_i ou pelos versores $\underset{\sim}{e}_i$ que geram os eixos, planos e sistemas. Por exemplo, em $\mathbb{E}_{\underset{\sim}{o}}$, um eixo de coordenadas é simbolizado por $(\underset{\sim}{x}_1)_{\underset{\sim}{o}}$ ou $(\underset{\sim}{e}_1)_{\underset{\sim}{o}}$ e um plano de coordenadas por $(x_1,x_3)_{\underset{\sim}{o}}$ ou $(\underset{\sim}{e}_1,\underset{\sim}{e}_3)_{\underset{\sim}{o}}$.

A escolha de uma orientação relativa dos eixos de coordenadas de $\mathbb{E}$ ou da ordem dos versores da base

$\mathbb{B} = \{\underset{\sim}{e}_1, \underset{\sim}{e}_2, \underset{\sim}{e}_3\}$ de V, torna esses espaços em espaços orientados. Existem duas orientações, uma chamada de direita ou positiva e outra de esquerda ou negativa.

2.6 - Subespaços de $\mathbb{E}$.

Os subespaços de um espaço tangente $\mathbb{E}_{\underset{\sim}{o}}$ de $\mathbb{E}$ são representados pelo ponto $\underset{\sim}{O}$ de coordenadas e dimensão zero, pelos três eixos $(x_1)_{\underset{\sim}{o}}$, $(x_2)_{\underset{\sim}{o}}$ e $(x_3)_{\underset{\sim}{o}}$ de uma dimensão, pelos três planos $(x_1,x_2)_{\underset{\sim}{o}}$, $(x_1,x_3)_{\underset{\sim}{o}}$ e $(x_2,x_3)_{\underset{\sim}{o}}$ de duas dimensões e, pelo sistema de coordenadas cartesianas $(x_1,x_2,x_3)_{\underset{\sim}{o}}$ de três dimensões. Essa concretização de subespaços pode ser estendida a todos os pontos de $\mathbb{E}$.

A soma ortogonal de dois subespaços $\bar{\mathbb{E}}$ e $\bar{\mathbb{E}}^{\perp}$ de $\mathbb{E}$, expressa por

$$\bar{\mathbb{E}} \oplus \bar{\mathbb{E}}^{\perp} = \mathbb{E}, \tag{2.6.1}$$

é um exemplo de soma direta em que $\bar{\mathbb{E}}^{\perp}$, chamado de complemento ortogonal de $\mathbb{E}$, é o conjunto de vetores de $\mathbb{E}$ perpendiculares a $\bar{\mathbb{E}}$.

De acordo com a definição de soma direta, um vetor qualquer $\underset{\sim}{r} \in \mathbb{E}$ é expresso univocamente por

$$\underset{\sim}{r} = \bar{\underset{\sim}{r}} + \bar{\underset{\sim}{r}}^{\perp}, \tag{2.6.2}$$

para $\bar{\underset{\sim}{r}} \in \bar{\mathbb{E}}$ e $\bar{\underset{\sim}{r}}^{\perp} \in \bar{\mathbb{E}}^{\perp}$. O vetor $\bar{\underset{\sim}{r}}$ é chamado de projeção ortogonal de $\underset{\sim}{r}$ em $\bar{\mathbb{E}}$. Na Fig. 2.6.1, $\bar{\mathbb{E}}_{\underset{\sim}{o}}$ é o plano $(x_1,x_2)_{\underset{\sim}{o}}$, $\bar{\mathbb{E}}^{\perp}_{\underset{\sim}{o}}$ é o eixo $(x_3)_{\underset{\sim}{o}}$ e $\mathbb{E}_{\underset{\sim}{o}}$ é o sistema $(x_1,x_2,x_3)_{\underset{\sim}{o}}$. Dizemos

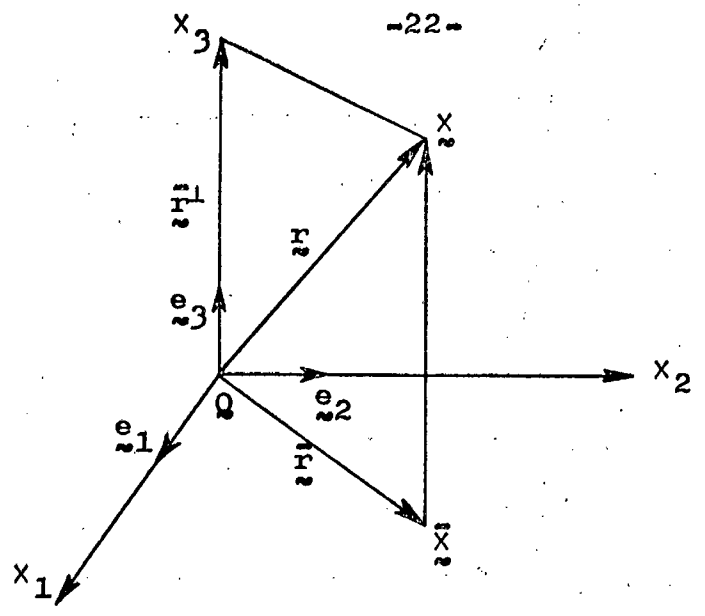

Fig. 2.6.1 - Soma ortogonal em $\mathbb{E}_{\underset{\sim}{0}}$.

também que o ponto $\underset{\sim}{\tilde{x}}$ é a projeção ortogonal do ponto $\underset{\sim}{x}$ no plano de coordenadas $(x_1, x_2)_{\underset{\sim}{0}}$.

CAPÍTULO 3

TRANSFORMAÇÕES LINEARES

3.1 - Tensor

Tensor $\underset{\sim}{T}$ (de segunda ordem) é uma função linear que é um endomorfismo simbolizado por

$$\underset{\sim}{T}: V \to V \tag{3.1.1}$$

e definida por

$$\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{T}\underset{\sim}{v}, \tag{3.1.2}$$

para quaisquer vetores $\underset{\sim}{u},\underset{\sim}{v} \in V$. Sendo $\underset{\sim}{T}$ uma função linear, para quaisquer $\underset{\sim}{v}_1,\underset{\sim}{v}_2 \in V$ e escalar $a \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{cases} \underset{\sim}{T}(\underset{\sim}{v}_1+\underset{\sim}{v}_2) = \underset{\sim}{T}\underset{\sim}{v}_1 + \underset{\sim}{T}\underset{\sim}{v}_2; \\ \underset{\sim}{T}(a\underset{\sim}{v}) = a\underset{\sim}{T}\underset{\sim}{v}. \end{cases} \tag{3.1.3}$$

A <u>imagem</u> de $\underset{\sim}{T}$ é o subespaço de V que consiste dos valores $\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{T}\underset{\sim}{v}$. O <u>núcleo</u> de $\underset{\sim}{T}$ é o subespaço de V que consiste dos argumentos $\underset{\sim}{v}$ para os quais $\underset{\sim}{T}\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{0}$. A dimensão da imagem de $\underset{\sim}{T}$ é chamada de <u>posto</u> de $\underset{\sim}{T}$ e a dimensão do núcleo é chamada de <u>nulidade</u> de $\underset{\sim}{T}$. A dimensão de V é a soma do posto com a nulidade de $\underset{\sim}{T}$.

Por exemplo, se

$$\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{P}: V \to V \tag{3.1.4}$$

onde V é o espaço de translação de $\mathbb{E}$, é o tensor projeção ortogonal que projeta um raio vetor $\underset{\sim}{r}$ no plano $(x_1,x_2)_{\underset{\sim}{o}}$, então esse plano é a imagem de $\underset{\sim}{P}$ e o eixo $(x_3)_{\underset{\sim}{o}}$ é o núcleo de $\underset{\sim}{P}$ (Fig. 2.6.1). Nesse caso o posto de $\underset{\sim}{P}$ é dois, a nulidade de $\underset{\sim}{P}$ é um e $2+1 = 3$ é a dimensão de V.

O tensor $\underset{\sim}{P}$ é um exemplo de endomorfismo que não é um automorfismo, pois, qualquer vetor de V que assinala pontos de $\mathbb{E}$ contidos em uma reta paralela ao eixo $(x_3)_{\underset{\sim}{o}}$ tem a mesma imagem no plano $(x_1,x_2)_{\underset{\sim}{o}}$ de sorte que o tensor projeção ortogonal inverso não é definido.

3.2 - Componentes do tensor.

Seja $\mathbb{B} = \{\underset{\sim}{e}_1,\underset{\sim}{e}_2,\underset{\sim}{e}_3\}$ uma base escolhida tanto para o domínio como para o contradomínio de um tensor $\underset{\sim}{T}: V \to V$. Cada vetor $\underset{\sim}{e}_j$, $j = 1,2,3$, do domínio é transformado por $\underset{\sim}{T}$ em um vetor $\underset{\sim}{T}\underset{\sim}{e}_j$ que por sua vez pode ser expresso como uma combinação linear em relação a base $\mathbb{B}$, i.e., temos o sistema,

$$(3.2.1)\qquad \begin{cases} \underset{\sim}{T}\underset{\sim}{e}_1 = T_{11}\underset{\sim}{e}_1 + T_{21}\underset{\sim}{e}_2 + T_{31}\underset{\sim}{e}_3, \\ \underset{\sim}{T}\underset{\sim}{e}_2 = T_{12}\underset{\sim}{e}_1 + T_{22}\underset{\sim}{e}_2 + T_{32}\underset{\sim}{e}_3, \\ \underset{\sim}{T}\underset{\sim}{e}_3 = T_{13}\underset{\sim}{e}_1 + T_{23}\underset{\sim}{e}_2 + T_{33}\underset{\sim}{e}_3, \end{cases}$$

ou, usando a convenção de somatório,

$$(3.2.2)\qquad \underset{\sim}{T}\underset{\sim}{e}_j = T_{kj}\underset{\sim}{e}_k.$$

Os números T_{kj} são os componentes cartesianos do tensor $\underset{\sim}{T}$ em

relação a base $\mathbb{B}$.

Para determinar esses números temos

$$\underset{\sim}{e}_i \cdot \underset{\approx}{T}\underset{\sim}{e}_j = T_{kj}\underset{\sim}{e}_i \cdot \underset{\sim}{e}_k = T_{kj}\delta_{ik},$$

portanto,

$$T_{ij} = \underset{\sim}{e}_i \cdot \underset{\approx}{T}\underset{\sim}{e}_j, \tag{3.2.3}$$

definindo a matriz

$$[\underset{\approx}{T}] = [T_{ij}] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}, \tag{3.2.4}$$

chamada de <u>matriz do tensor</u> $\underset{\approx}{T}$ <u>referida a base</u> $\mathbb{B}$. Dizemos que o tensor $\underset{\approx}{T}$ é <u>representado</u> pela matriz $[\underset{\approx}{T}]$ em relação a uma certa base. As colunas $j = 1,2,3$ da matriz exibem as componentes do vetor $\underset{\approx}{T}\underset{\sim}{e}_j$.

A expressão componente da transformação $\underset{\approx}{T}\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{u}$ pode ser obtida pela seqüência de operações seguinte:

$$\underset{\approx}{T}\underset{\sim}{v} = \underset{\approx}{T}v_j\underset{\sim}{e}_j = v_j\underset{\approx}{T}\underset{\sim}{e}_j = u_i\underset{\sim}{e}_i,$$

$$v_j\underset{\sim}{e}_k \cdot \underset{\approx}{T}\underset{\sim}{e}_j = u_i\underset{\sim}{e}_k \cdot \underset{\sim}{e}_i = u_i\delta_{ki} = u_k,$$

e, usando (3.2.3), chegamos a

$$T_{kj}v_j = u_k. \tag{3.2.5}$$

3.3 - Espaço vetorial dos tensores.

O conjunto de tensores forma um espaço linear, $\mathbb{L}(V,V)$ ou $\mathbb{L}$, onde a soma, definida por

(3.3.1) $$(\underset{\sim}{R}+\underset{\sim}{T})\underset{\sim}{v} = \underset{\sim\sim}{R}\underset{\sim}{v} + \underset{\sim\sim}{T}\underset{\sim}{v},$$

e a multiplicação por escalar definida por

(3.3.2) $$(a\underset{\sim}{T})\underset{\sim}{v} = a(\underset{\sim\sim}{T}\underset{\sim}{v}),$$

obedecem as regras (2.1.1) e (2.1.2), respectivamente. O vetor zero é o tensor $\underset{\sim}{0}$ definido em $(2.1.1)_3$, tal que

(3.3.3) $$\underset{\sim\sim}{0}\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{0}.$$

O vetor unidade é o tensor $\underset{\sim}{1}$, definido em $(2.1.2)_2$, tal que

(3.3.4) $$\underset{\sim\sim}{1}\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{v}.$$

Em relação a uma base B, a matriz $[\underset{\sim}{0}]$ tem todos os elementos nulos e a matriz $[\underset{\sim}{1}]$ é dada por

(3.3.5) $$[\underset{\sim}{1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [\delta_{ij}].$$

Há um isomorfismo entre os espaços vetoriais $\mathbb{L}$ dos tensores e $\mathbb{R}^9$ das matrizes que os representam em relação a uma determinada base.

3.4 - Multiplicação de tensores.

O produto $\underset{\sim\sim}{TR}$ de dois tensores é definido pela composição de funções associativas

(3.4.1) $$\underset{\sim}{T}(\underset{\sim\sim}{R}\underset{\sim}{v}) = (\underset{\sim\sim}{TR})\underset{\sim}{v}.$$

Esse produto obedece as seguintes regras:

$$
(3.4.2)\qquad
\begin{cases}
(\underset{\approx}{TR})\underset{\approx}{S} = \underset{\approx}{T}(\underset{\approx}{RS}), \\
\underset{\approx}{T}(\underset{\approx}{R}+\underset{\approx}{S}) = \underset{\approx}{TR} + \underset{\approx}{TS}, \\
(\underset{\approx}{R}+\underset{\approx}{S})\underset{\approx}{T} = \underset{\approx}{RT} + \underset{\approx}{ST}, \\
a(\underset{\approx}{RT}) = (a\underset{\approx}{R})\underset{\approx}{T} = \underset{\approx}{R}(a\underset{\approx}{T}), \\
\underset{\approx}{1T} = \underset{\approx}{T1} = \underset{\approx}{T}.
\end{cases}
$$

A obediência a essas regras mune o conjunto de tensores, além da estrutura de um espaço vetorial, da estrutura de uma <u>álgebra</u>. Em geral, essa multiplicação não é uma operação comutativa mas, se $\underset{\approx}{TR} = \underset{\approx}{RT}$ dizemos que $\underset{\approx}{T}$ e $\underset{\approx}{R}$ <u>comutam</u>.

Os componentes do produto $\underset{\approx}{TR}$ são obtidos de (3.4.1), substituindo $\underset{\approx}{v}$ por $\underset{\approx}{e}_j$ e usando (3.2.2), i.e.,

$$(\underset{\approx}{TR})\underset{\approx}{e}_j = \underset{\approx}{T}(\underset{\approx}{R}\underset{\approx}{e}_j) = \underset{\approx}{TR}_{kj}\underset{\approx}{e}_k = R_{kj}\underset{\approx}{T}\underset{\approx}{e}_k = R_{kj}T_{ik}\underset{\approx}{e}_i = (\underset{\approx}{TR})_{ij}\underset{\approx}{e}_i.$$

Então, temos:

$$(3.4.3)\qquad (\underset{\approx}{TR})_{ij} = T_{ik}R_{kj},$$

que define também o produto das matrizes $[\underset{\approx}{T}]$ e $[\underset{\approx}{R}]$;

Quanto às potências de tensores, temos, por definição:

$$(3.4.4)\qquad \underset{\approx}{T}^0 = \underset{\approx}{1},$$

e, obviamente

$$(3.4.5)\qquad \underset{\approx}{T}^1 = \underset{\approx}{T}.$$

Em (3.4.1) a associatividade define o quadrado do tensor por

$$(3.4.6)\qquad \underset{\approx}{T}^2 = \underset{\approx}{TT}.$$

Segundo (3.4.3), os componentes de $\underset{\approx}{T}^2$ são

(3.4.7) $$(\underset{\sim}{T}\underset{\sim}{T})_{ij} = (\underset{\sim}{T}^2)_{ij} = T_{ik}T_{kj} .$$

Estendendo a associatividade da multiplicação, temos

(3.4.8) $$\underset{\sim}{T}^3 = \underset{\sim}{T}^2\underset{\sim}{T} = (\underset{\sim}{T}\underset{\sim}{T})\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{T}(\underset{\sim}{T}\underset{\sim}{T}) = \underset{\sim}{T}\underset{\sim}{T}^2,$$

e, em geral,

(3.4.9) $$\underset{\sim}{T}^n = \underset{\sim}{T}^{n-1}\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{T}\underset{\sim}{T}^{n-1}.$$

Se n e m são números inteiros não-negativos,

(3.4.10) $$\underset{\sim}{T}^m\underset{\sim}{T}^n = \underset{\sim}{T}^n\underset{\sim}{T}^m = \underset{\sim}{T}^{m+n},$$

i.e., $\underset{\sim}{T}^m$ e $\underset{\sim}{T}^n$ comutam. Se $\underset{\sim}{T}$ é inversível (automorfismo) e n é um número natural,

(3.4.11) $$\underset{\sim}{T}^{-n} = (\underset{\sim}{T}^{-1})^n$$

e $\underset{\sim}{T}^{-n}$ e $\underset{\sim}{T}^{-m}$ também comutam.

3.5 - Polinômios de um tensor.

Definida a multiplicação de um tensor por um escalar e a soma e a potência de tensores, fica definido um polinômio em um tensor $\underset{\sim}{T}$,

(3.5.1) $$\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T}) = k_o\underset{\sim}{1} + k_1\underset{\sim}{T} + \ldots + k_m\underset{\sim}{T}^m.$$

Seja um polinômio escalar na indeterminada x,

(3.5.2) $$f(x) = k_o + k_1x + \ldots + k_mx^m$$

com os mesmos coeficientes k_i. O polinômio tensorial $\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T})$ é chamado de <u>valor</u> de f(x) em $\underset{\sim}{T}$ ou de <u>função correspondente</u> de f(x).

As relações entre os polinômios em x podem ser estendidas aos polinômios em $\underset{\approx}{T}$. Por exemplo, como conseqüência das identidades

$$x^2-1 = (x+1)(x-1), \tag{3.5.3}$$

$$x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1), \tag{3.5.4}$$

$$(x+1)^2 + (x-1)^2 - 2x^2 = 2, \tag{3.5.5}$$

temos, respectivamente,

$$\underset{\approx}{T}^2-\underset{\approx}{1} = (\underset{\approx}{T}+\underset{\approx}{1})(\underset{\approx}{T}-\underset{\approx}{1}), \tag{3.5.6}$$

$$\underset{\approx}{T}^3+\underset{\approx}{1} = (\underset{\approx}{T}+\underset{\approx}{1})(\underset{\approx}{T}^2-\underset{\approx}{T}+\underset{\approx}{1}), \tag{3.5.7}$$

$$(\underset{\approx}{T}+\underset{\approx}{1})^2 + (\underset{\approx}{T}-\underset{\approx}{1})^2 - 2\underset{\approx}{T}^2 = 2\underset{\approx}{1}. \tag{3.5.8}$$

Também, tendo em vista que

$$f(x)g(x) = g(x)f(x), \tag{3.5.9}$$

resulta que

$$\underset{\approx}{F}(\underset{\approx}{T})\underset{\approx}{G}(\underset{\approx}{T}) = \underset{\approx}{G}(\underset{\approx}{T})\underset{\approx}{F}(\underset{\approx}{T}), \tag{3.5.10}$$

i.e., os polinômios em um tensor $\underset{\approx}{T}$ são comutativos entre si.

3.6 - Tensor inverso.

Um tensor $\underset{\approx}{T}$ é inversível se de $\underset{\approx}{T}\underset{\approx}{v} = \underset{\approx}{u}$ podemos obter

$$\underset{\approx}{T}^{-1}\underset{\approx}{u} = \underset{\approx}{v}. \tag{3.6.1}$$

Se o tensor inverso $\underset{\approx}{T}^{-1}$ existe, então,

(3.6.2) $$\underset{\sim}{T}\underset{\sim}{T}^{-1} = \underset{\sim}{T}^{-1}\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{1}.$$

Se $\underset{\sim}{R}$ e $\underset{\sim}{T}$ são inversíveis,

(3.6.3) $$(\underset{\sim}{T}\underset{\sim}{R})^{-1} = \underset{\sim}{R}^{-1}\underset{\sim}{T}^{-1}$$

O tensor inverso existe quando $\underset{\sim}{T}$ é uma transformação biunívoca, i.e., se a função $\underset{\sim}{T}$ é ao mesmo tempo uma injeção e uma sobrejeção. A matriz do tensor inverso, $[\underset{\sim}{T}^{-1}]$, é igual a matriz inversa do tensor, $[\underset{\sim}{T}]^{-1}$. Tensores e matrizes inversíveis são também chamados de não-singulares.

A obediência as regras $(3.4.2)_1$ e $(3.4.2)_5$ e a existência do tensor inverso confere ao conjunto de tensores inversíveis a estrutura de um grupo chamado de grupo linear de $\mathbf{V}$ e simbolizado por $\mathbb{G}_i$.

3.7 - Tensor transposto.

O tensor transposto $\underset{\sim}{T}^T$ de um tensor $\underset{\sim}{T}$ é definido pela propriedade:

(3.7.1) $$\underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{T}\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{u}\cdot\underset{\sim}{T}^T\underset{\sim}{v}.$$

Pondo $\underset{\sim}{v} = v_i\underset{\sim}{e}_i$ e $\underset{\sim}{u} = u_j\underset{\sim}{e}_j$ e usando (3.2.3) temos

(3.7.2) $$T_{ij} = T^T_{ji} \quad \text{ou} \quad T^T_{ij} = T_{ji},$$

i.e., o componente ij do tensor transposto $\underset{\sim}{T}^T$ é igual ao componente ji do tensor $\underset{\sim}{T}$. Então, as linhas da matriz $[\underset{\sim}{T}]$ são as colunas da matriz $[\underset{\sim}{T}^T]$ e vice-versa. A matriz do tensor transposto, $[\underset{\sim}{T}^T]$, é igual a matriz transposta do tensor,

$[\underset{\sim}{T}]^T$.

A transposição é uma transformação linear de $\mathbb{L}$ em $\mathbb{L}$, pois,

$$(\underset{\sim}{T}+\underset{\sim}{R})^T = \underset{\sim}{T}^T + \underset{\sim}{R}^T \tag{3.7.3}$$

$$(a\underset{\sim}{T})^T = a\underset{\sim}{T}^T. \tag{3.7.4}$$

A relação entre composição e transposição é exemplificada por

$$(\underset{\sim}{T}\underset{\sim}{R})^T = \underset{\sim}{R}^T\underset{\sim}{T}^T. \tag{3.7.5}$$

Dizemos que $\underset{\sim}{T}$ é um <u>tensor simétrico</u> quando $\underset{\sim}{T}^T = \underset{\sim}{T}$, i.e., quando $T_{ij} = T_{ji}$. Quando $\underset{\sim}{T} = -\underset{\sim}{T}^T$, i.e., quando $T_{ij} = -T_{ji}$, $\underset{\sim}{T}$ é um <u>tensor antissimétrico</u>. Todo tensor $\underset{\sim}{T}$ admite a <u>decomposição cartesiana</u>,

$$\underset{\sim}{T} = \text{sim}\,\underset{\sim}{T} + \text{ant}\,\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{S}^T + \underset{\sim}{W}^T, \tag{3.7.6}$$

onde

$$\underset{\sim}{S}^T = \text{sim}\,\underset{\sim}{T} = \frac{1}{2}(\underset{\sim}{T}+\underset{\sim}{T}^T), \tag{3.7.7}$$

$$\underset{\sim}{W}^T = \text{ant}\,\underset{\sim}{T} = \frac{1}{2}(\underset{\sim}{T}-\underset{\sim}{T}^T), \tag{3.7.8}$$

são, respectivamente, as parcelas simétrica e antissimétrica de $\underset{\sim}{T}$.

A partir de (3.7.3) podemos concluir que a soma de tensores simétricos é um tensor simétrico e que a soma de tensores antissimétricos é um tensor antissimétrico. Também, a multiplicação de um tensor simétrico ou de um tensor antissimétrico por um escalar resulta respectivamente em um tensor simétrico e em um tensor antissimétrico. Os tensores simétricos e

antissimétricos formam subespaços lineares, respectivamente de seis e três dimensões, do espaço de todos os tensores. O produto de tensores simétricos não é, entretanto, necessariamente um tensor simétrico, de sorte que os tensores simétricos não têm a estrutura de uma álgebra. O produto de dois tensores simétricos $\underset{\sim}{S}_1$ e $\underset{\sim}{S}_2$ que permutam é um tensor simétrico pois

$$(\underset{\sim}{S}_1\underset{\sim}{S}_2)^T = \underset{\sim}{S}_2^T\,\underset{\sim}{S}_1^T = \underset{\sim}{S}_2\underset{\sim}{S}_1 = \underset{\sim}{S}_1\underset{\sim}{S}_2 \tag{3.7.9}$$

Então, a potência de um tensor simétrico é simétrico e um polinômio em um tensor simétrico também é simétrico.

3.8 - Traço de um tensor.

O traço de um tensor, $\operatorname{tr}\underset{\sim}{T}$, é a soma dos elementos da diagonal principal da matriz $[\underset{\sim}{T}]$ que representa o tensor em relação a uma base, i.e.,

$$\operatorname{tr}\underset{\sim}{T} = \operatorname{tr}[T_{ij}] = T_{ii}. \tag{3.8.1}$$

O traço é uma transformação linear do espaço vetorial dos tensores no espaço vetorial $\mathbb{R}$ dos escalares, $\operatorname{tr}: \mathbb{L} \to \mathbb{R}$. De fato,

$$\operatorname{tr}(\underset{\sim}{T}+\underset{\sim}{R}) = \operatorname{tr}\underset{\sim}{T} + \operatorname{tr}\underset{\sim}{R}, \tag{3.8.2}$$

$$\operatorname{tr}(a\underset{\sim}{T}) = a\operatorname{tr}\underset{\sim}{T}. \tag{3.8.3}$$

Temos as seguintes fórmulas,

$$\operatorname{tr}\underset{\sim}{T}^T = \operatorname{tr}\underset{\sim}{T}, \tag{3.8.4}$$

(3.8.5) $$\operatorname{tr} \underset{\approx}{1} = 3,$$

(3.8.6) $$\operatorname{tr} \underset{\approx}{W} = 0,$$

(3.8.7) $$\operatorname{tr} \underset{\approx}{T} = \operatorname{tr} (\underset{\approx}{S}^{T} + \underset{\approx}{W}^{T}) = \operatorname{tr} \underset{\approx}{S}^{T},$$

(3.8.8) $$\operatorname{tr}(\underset{\approx}{T}_1\underset{\approx}{T}_2\cdots\underset{\approx}{T}_n) = \operatorname{tr}(\underset{\approx}{T}_{i+1}\underset{\approx}{T}_{i+2}\cdots\underset{\approx}{T}_n\underset{\approx}{T}_1\underset{\approx}{T}_2\cdots\underset{\approx}{T}_i).$$

Essa última fórmula é válida para $i = 1,2,\ldots,n-1$. Por exemplo, para $n = 2$ e $n = 3$, temos, respectivamente,

(3.8.9) $$\operatorname{tr}(\underset{\approx}{T}_1\underset{\approx}{T}_2) = \operatorname{tr}(\underset{\approx}{T}_2\underset{\approx}{T}_1),$$

(3.8.10) $$\operatorname{tr}(\underset{\approx}{T}_1\underset{\approx}{T}_2\underset{\approx}{T}_3) = \operatorname{tr}(\underset{\approx}{T}_2\underset{\approx}{T}_3\underset{\approx}{T}_1) = \operatorname{tr}(\underset{\approx}{T}_3\underset{\approx}{T}_1\underset{\approx}{T}_2)$$

3.9 - Produto interno do espaço $\mathbb{L}$.

Definimos o produto interno de dois tensores $\underset{\approx}{R}$ e $\underset{\approx}{T}$, simbolizado por $\underset{\approx}{R}\cdot\underset{\approx}{T}$, como sendo o escalar

(3.9.1) $$\underset{\approx}{R}\cdot\underset{\approx}{T} = \operatorname{tr}(\underset{\approx}{R}\underset{\approx}{T}^{T}).$$

Podemos verificar que esse produto obedece as regras (2.1.5) do produto interno de dois vetores de $\mathbb{V}$. Em relação a uma base $\mathbb{B}$, o produto interno é expresso por

(3.9.2) $$\underset{\approx}{R}\cdot\underset{\approx}{T} = R_{ij}T_{ij}.$$

Dizemos que o espaço vetorial $\mathbb{L}$ dos tensores fica munido de uma estrutura algébrica de produto interno quando adotamos a operação (3.9.1) definida pelas regras (2.1.5).

O <u>módulo</u> ou <u>magnitude</u> de um tensor $\underset{\approx}{T} \in \mathbb{L}$ é então definido por

(3.9.3) $$\|\underset{\approx}{T}\| = +\sqrt{\underset{\approx}{T}\cdot\underset{\approx}{T}} = +\sqrt{\operatorname{tr}\ \underset{\approx}{T}\ \underset{\approx}{T}^{T}}.$$

Pondo $\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{1}$ em (3.9.2), verificamos que

$$\underset{\sim}{T}\cdot\underset{\sim}{1} = \underset{\sim}{1}\cdot\underset{\sim}{T} = T_{ij}\delta_{ij} = T_{ii} = \text{tr}\,\underset{\sim}{T}. \tag{3.9.4}$$

Se $\underset{\sim}{S}$ é um tensor simétrico e $\underset{\sim}{W}$ um tensor antissimétrico, então

$$S\cdot W = S_{ij}W_{ij} = 0, \tag{3.9.5}$$

pois, $S_{ij} = S_{ji}$ e $W_{ij} = -W_{ji}$ significa que $W_{11} = W_{22} = W_{33} = 0$. Consequentemente, para $\underset{\sim}{R}$ e $\underset{\sim}{T}$ arbitrários,

$$\underset{\sim}{R}\cdot\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{S}^{R}\cdot\underset{\sim}{S}^{T} + \underset{\sim}{W}^{R}\cdot\underset{\sim}{W}^{T}. \tag{3.9.6}$$

3.10 - Produto tensorial.

O produto tensorial de dois vetores, $a \otimes b$, também chamado de produto diádico, é o tensor definido por

$$(\underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{b})\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{a}(\underset{\sim}{b}\cdot\underset{\sim}{v}). \tag{3.10.1}$$

Para obtermos os componentes do produto tensorial, partimos de (3.2.3), i.e.,

$$(a \otimes b)_{ij} = e_i\cdot(a \otimes b)e_j = e_i\cdot(e_k \otimes e_m)e_j\, a_k b_m =$$
$$= e_i\cdot e_k(e_m\cdot e_j)a_k b_m = \delta_{ik}\delta_{mj}\, a_k b_m = a_i b_j.$$

Então,

$$(a \otimes b)_{ij} = a_i b_j. \tag{3.10.2}$$

Vemos que

$$\text{tr}(a \otimes b) = a\cdot b = a_i b_i, \tag{3.10.3}$$

i.e., o traço do produto tensorial de dois vetores é o produto interno desses vetores.

Quanto ao tensor transposto, temos

$$(\underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{b})^T = \underset{\sim}{b} \otimes \underset{\sim}{a}. \tag{3.10.4}$$

A parcela antissimétrica de $a \otimes b$ é um tensor chamado de <u>produto externo</u>, simbolizado por $\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b}$; i.e.,

$$\underset{\sim}{a} \wedge \underset{\sim}{b} = \text{ant}\, \underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{b} = \frac{1}{2} (\underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{b} - \underset{\sim}{b} \otimes \underset{\sim}{a}). \tag{3.10.5}$$

Quanto ao módulo, é fácil verificar que

$$\|\underset{\sim}{a} \otimes \underset{\sim}{b}\| = \|\underset{\sim}{a}\| \|\underset{\sim}{b}\|. \tag{3.10.6}$$

3.11 - <u>Base do espaço dos tensores</u>.

Consideremos a seguinte identidade válida para qualquer tensor $\underset{\sim}{A}$ e vetores $\underset{\sim}{u}$ e $\underset{\sim}{v}$:

$$\underset{\sim}{A} \cdot (\underset{\sim}{u} \otimes \underset{\sim}{v}) = \underset{\sim}{u} \cdot \underset{\sim}{A}\underset{\sim}{v} = A_{ij} u_i v_j. \tag{3.11.1}$$

Pondo $\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j$, $\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{e}_k$ e $\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{e}_m$, temos

$$(\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j) \cdot (\underset{\sim}{e}_k \otimes \underset{\sim}{e}_m) = \underset{\sim}{e}_k \cdot (\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j) \underset{\sim}{e}_m,$$

ou, de acordo com (3.10.1),

$$(\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j) \cdot (\underset{\sim}{e}_k \otimes \underset{\sim}{e}_m) = \underset{\sim}{e}_k \cdot \underset{\sim}{e}_i (\underset{\sim}{e}_j \cdot \underset{\sim}{e}_m),$$

i.e.,

$$(\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j) \cdot (\underset{\sim}{e}_k \otimes \underset{\sim}{e}_m) = \delta_{ik} \delta_{jm}, \tag{3.11.2}$$

e os nove tensores $\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j$ são ortonormais.

Além disso, de acordo com (3.10.1),

$$(T_{ij}\,\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j)\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{e}_i\,T_{ij}(\underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{e}_j) = \underset{\sim}{e}_i\,T_{ij}\,v_j,$$

e de acordo com (3.2.5),

$$(T_{ij}\,\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j)\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{T}\,v_j\underset{\sim}{e}_j = \underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{v}.$$

Então,

(3.11.3) $$\underset{\sim}{T} = T_{ij}\,\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j,$$

e os nove tensores ortonormais $\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j$ geram o espaço dos tensores e constituem uma base desse espaço de nove dimensões. O espaço dos tensores simbolizado por $\mathbb{L}$ ou $\mathbb{L}(V,V)$ pode também ser simbolizado por $V \otimes V$.

Cada um dos nove tensores base $e_i \otimes e_j$ pode ser representado por uma matriz oujos elementos de acordo com (3.11.2), são dados por

(3.11.4) $$(e_i \otimes e_j)_{km} = \delta_{ik}\delta_{jm}.$$

Por exemplo,

$$[(\underset{\sim}{e}_1 \otimes \underset{\sim}{e}_1)_{km}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad [(\underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}_3)_{km}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tal como os componentes de um vetor $\underset{\sim}{v}$ na base $\mathbb{B} = \{\underset{\sim}{e}_i\}$ são dados por $v_i = \underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{e}_i$, os componentes de um tensor $\underset{\sim}{T}$ na base $\{\underset{\sim}{e}_k \otimes \underset{\sim}{e}_m\}$ são dados por

$$\underset{\sim}{T}\cdot\underset{\sim}{e}_k \otimes \underset{\sim}{e}_m = T_{ij}\,\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j\cdot\underset{\sim}{e}_k \otimes \underset{\sim}{e}_m = T_{ij}\,\delta_{ik}\delta_{jm} = T_{km}$$

Temos também que

$$\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_1 + \underset{\sim}{e}_2 \otimes \underset{\sim}{e}_2 + \underset{\sim}{e}_3 \otimes \underset{\sim}{e}_3 = \underset{\sim}{1},$$

em analogia com

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

O espaço vetorial dos tensores simétricos simbolizado por $\$(\mathbb{V},\mathbb{V})$ ou $\$$, tem seis dimensões. De (3.11.2), tendo em vista que

$$(3.11.5) \qquad \text{sim } \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j = \frac{1}{2}\,(\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j + \underset{\sim}{e}_j \otimes \underset{\sim}{e}_i),$$

vemos que os seis tensores $\sqrt{2}\ \text{sim}\ \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j$ são ortonormais e como

$$(3.11.6) \qquad \underset{\sim}{S} = S_{ij}\sqrt{2}\ \text{sim}\ \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j,$$

esses seis tensores formam uma base do espaço $\$$. Do mesmo modo, de acordo com (3.10.5), verificamos que os três tensores

$$(3.11.7) \qquad \sqrt{2}\ \text{ant}\ \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j = \sqrt{2}\ \underset{\sim}{e}_i \wedge \underset{\sim}{e}_j, \quad i < j,$$

formam uma base do espaço vetorial dos tensores antissimétrico simbolizado por $\mathbb{W}(\mathbb{V},\mathbb{V})$ ou simplesmente por $\mathbb{W}$. Então,

$$(3.11.8) \qquad \underset{\sim}{W} = W_{ij}\sqrt{2}\ \text{ant}\ \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j = W_{ij}\sqrt{2}\ \underset{\sim}{e}_i \wedge \underset{\sim}{e}_j, \quad i < j.$$

3.12 - Tensor projeção ortogonal.

Como transformação linear $\underset{\sim}{P}: \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ dos vetores espaciais, o tensor projeção ortogonal simbolizado em (3.1.4) como função linear de raios vetores de $\mathbb{E}$, é definido por

$$(3.12.1) \qquad \underset{\sim}{P}\underset{\sim}{v} = \bar{\underset{\sim}{v}},$$

onde $\bar{\underset{\sim}{v}} \in \bar{\mathbb{V}}$ é a projeção ortogonal de $\underset{\sim}{v} \in \mathbb{V}$ no subespaço $\bar{\mathbb{V}}$

de $\mathbb{V}$. Os vetores do complemento ortogonal $\bar{\mathbb{V}}^{\perp}$ de $\mathbb{V}$ são simbolizados por $\underset{\sim}{v}^{\perp}$. Isomorficamente a (2.6.1) e (2.6.2) temos, respectivamente,

(3.12.2) $$\bar{\mathbb{V}} \oplus \bar{\mathbb{V}}^{\perp} = \mathbb{V},$$

(3.12.3) $$\underset{\sim}{\bar{v}} + \underset{\sim}{\bar{v}}^{\perp} = \underset{\sim}{v},$$

O tensor $\underset{\sim}{P}: \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ tem as seguintes propriedades:

1. Projeções ortogonais são tensores <u>não-negativos</u> e simétricos. De fato,

(3.12.4) $$\underset{\sim}{v} \cdot \underset{\sim}{P}\, \underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{\bar{v}} + \underset{\sim}{\bar{v}}^{\perp} \cdot \underset{\sim}{\bar{v}} = \underset{\sim}{\bar{v}} \cdot \underset{\sim}{\bar{v}} \geq 0,$$

i.e., $\underset{\sim}{P}$ é não-negativo e, se $\underset{\sim}{v}_1 = \underset{\sim}{\bar{v}}_1 + \underset{\sim}{\bar{v}}_1^{\perp}$,

(3.12.5) $$\underset{\sim}{v}_1 \cdot \underset{\sim}{P}\, \underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{\bar{v}}_1 + \underset{\sim}{\bar{v}}_1^{\perp} \cdot \underset{\sim}{\bar{v}} = \underset{\sim}{\bar{v}}_1 \cdot \underset{\sim}{\bar{v}} = \underset{\sim}{\bar{v}}_1 \cdot \underset{\sim}{\bar{v}} + \underset{\sim}{\bar{v}}^{\perp} = \underset{\sim}{P}\, \underset{\sim}{v}_1 \cdot \underset{\sim}{v},$$

i.e., de acordo com (3.7.1), $\underset{\sim}{P}$ é simétrico ou, $\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{P}^{T}$.

2. Projeções ortogonais são tensores <u>idempotentes</u>, pois, para qualquer $\underset{\sim}{v} \in \mathbb{V}$,

(3.12.6) $$\underset{\sim}{P}^2 \underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{P}\underset{\sim}{\bar{v}} = \underset{\sim}{\bar{v}} = \underset{\sim}{P}\underset{\sim}{v},$$

i.e.,

(3.12.7) $$\underset{\sim}{P}^2 = \underset{\sim}{P}.$$

3. Com essas duas propriedades podemos concluir que toda projeção ortogonal é um tensor simétrico, idempotente. A recíproca também é verdadeira, i.e., todo tensor simétrico idempotente é uma projeção ortogonal.

4. Se $\underset{\sim}{P}$ é uma projeção ortogonal, então $\underset{\sim}{1}-\underset{\sim}{P}$ também é uma projeção ortogonal, pois

(3.12.8) $$(\underset{\approx}{1}-\underset{\approx}{P})(\underset{\approx}{1}-\underset{\approx}{P}) = (\underset{\approx}{1}-\underset{\approx}{P})^2 = \underset{\approx}{1} - 2\underset{\approx}{P} + \underset{\approx}{P}^2 = \underset{\approx}{1} - \underset{\approx}{P}$$

mostra que o tensor simétrico $\underset{\approx}{1} - \underset{\approx}{P}$ também é idempotente.

5. As imagens de $\underset{\approx}{P}$ e $\underset{\approx}{1} - \underset{\approx}{P}$ são ortogonais. De fato, levando em conta que

$$(\underset{\approx}{1}-\underset{\approx}{P})\underset{\approx}{P} = \underset{\approx}{P}(\underset{\approx}{1}-\underset{\approx}{P}) = \underset{\approx}{P}^2 - \underset{\approx}{P}^2 = 0$$

resulta que para todo $\underset{\approx}{v}$ e $\underset{\approx}{v}_1$ de $\mathbb{V}$,

(3.12.9) $$\underset{\approx}{P}\underset{\approx}{v}\cdot(\underset{\approx}{1}-\underset{\approx}{P})\underset{\approx}{v}_1 = \underset{\approx}{v}\cdot\underset{\approx}{P}(\underset{\approx}{1}-\underset{\approx}{P})\underset{\approx}{v}_1 = 0.$$

3.13 - Representações do tensor projeção ortogonal.

Consideremos a projeção ortogonal concretizada na Fig. 2.6.1. Nesse caso, o sistema (3.2.1) é expresso por

(3.13.1) $$\begin{cases} \underset{\approx}{P}\,\underset{\approx}{e}_1 = \underset{\approx}{e}_1 , \\ \underset{\approx}{P}\,\underset{\approx}{e}_2 = \underset{\approx}{e}_2 , \\ \underset{\approx}{P}\,\underset{\approx}{e}_3 = \underset{\approx}{0} . \end{cases}$$

A matriz de $\underset{\approx}{P}$ é

(3.13.2) $$[\underset{\approx}{P}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [\underset{\approx}{e}_1\otimes\underset{\approx}{e}_1] + [\underset{\approx}{e}_2\otimes\underset{\approx}{e}_2] = [\underset{\approx}{1}-(\underset{\approx}{e}_3\otimes\underset{\approx}{e}_3)],$$

enquanto que

(3.13.3) $$[\underset{\approx}{1}-\underset{\approx}{P}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [\underset{\approx}{e}_3 \otimes \underset{\approx}{e}_3].$$

Outras representações de $\underset{\approx}{P}$ são as matrizes $[\underset{\approx}{0}]$ e $[\underset{\approx}{1}]$ res-

pectivamente das projeções nos subespaços triviais concretizados pela origem $\underset{\sim}{0}$ e por todo o espaço $\mathbb{E}_{\underset{\sim}{0}}$.

CAPÍTULO 4

TRANSFORMAÇÕES DE BASES

4.1 - Tensor ortogonal.

Um tensor $\underset{\sim}{Q}$ chamado de ortogonal é um tensor inversível (automorfismo) cujo inverso coincide com o transposto. Então, $\underset{\sim}{Q}$ tem as propriedades equivalentes

$$\underset{\sim}{Q}^{-1} = \underset{\sim}{Q}^{T} , \tag{4.1.1}$$

$$\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{Q}^{T} = \underset{\sim}{Q}^{T}\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{1} , \tag{4.1.2}$$

$$\det \underset{\sim}{Q} = \det \underset{\sim}{Q}^{T} = \pm 1. \tag{4.1.3}$$

Outra propriedade equivalente é expressa por

$$\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{u}\cdot\underset{\sim}{Q}^{T}\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{u} \tag{4.1.4}$$

e se $\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{v}$, por

$$\|\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{v}\| = \|\underset{\sim}{v}\| . \tag{4.1.5}$$

O tensor ortogonal é então chamado de tensor isométrico porque não altera o comprimento de vetores nem os ângulos entre eles.

Nem a soma de dois tensores ortogonais nem o produto de um escalar por um tensor ortogonal, resultam necessariamente em tensor ortogonal, i.e., o conjunto de tensores ortogonais não é um subespaço de $\mathbb{L}$. Esse conjunto possui entretanto a estrutura de um grupo chamado de grupo ortogonal de V, simbolizado por $\mathbb{O}$. De fato, de acordo com (1.3.1), (1.3.2) e

(1.3.3), os tensores ortogonais formam um conjunto de funções inversíveis (que são automorfismos) com as quais definimos a multiplicação associativa e entre as quais existe o tensor ortogonal $\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{1}$ e o tensor inverso $\underset{\sim}{Q}^{-1} = \underset{\sim}{Q}^{T}$. O tensor ortogonal $\underset{\sim}{Q}$ é chamado de <u>próprio</u> quando $\det \underset{\sim}{Q} = 1$ e de <u>impróprio</u> quando $\det \underset{\sim}{Q} = -1$.

Os tensores ortogonais próprios constituem um subgrupo $\mathbb{O}^+ \subset \mathbb{O}$, chamado de <u>subgrupo ortogonal próprio</u> de $\mathbf{V}$. Os tensores ortogonais impróprios não formam um grupo porque o produto de dois tensores com determinante igual a -1 é um tensor ortogonal com determinante $+1$, i.e., é próprio.

Para concretizar em $\mathbb{E}$ os elementos do grupo $\mathbb{O}$ de $\mathbf{V}$, dizemos que esse grupo consiste de rotações em torno de um ponto (origem $\underset{\sim}{0}$) e de transformações que são o resultado de composições de rotações e reflexões em relação a origem. Por outro lado, o subgrupo $\mathbb{O}^+$ consiste somente de rotações em torno de $\underset{\sim}{0}$ e por isso é chamado também de <u>subgrupo</u> (ou grupo) <u>das rotações</u>. Tanto $\mathbb{O}$ como $\mathbb{O}^+$ são grupos infinitos e não-abelianos.

4.2 - <u>Transformações ortogonais de bases</u>.

Um tensor ortogonal $\underset{\sim}{Q} \in \mathbb{O}$ transforma uma base ortonormal $\mathbb{B} = \{\underset{\sim}{e}_i\}$ de $\mathbf{V}$ em outra $\mathbb{B}^* = \{\underset{\sim}{e}^*_i\}$ tal que

$$\underset{\sim}{e}^*_j = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{e}_j . \tag{4.2.1}$$

Essas transformações de base são concretizadas em $\mathbb{E}$ por rota-

ções em torno da origem $\underset{\sim}{0}$ que formam o subgrupo $\mathbb{O}^+ \subset \mathbb{O}$, e por reflexões de um versor em relação ao plano dos outros dois que são elementos de $\mathbb{O}$ mas não formam um subgrupo (Fig. 4.2.1).

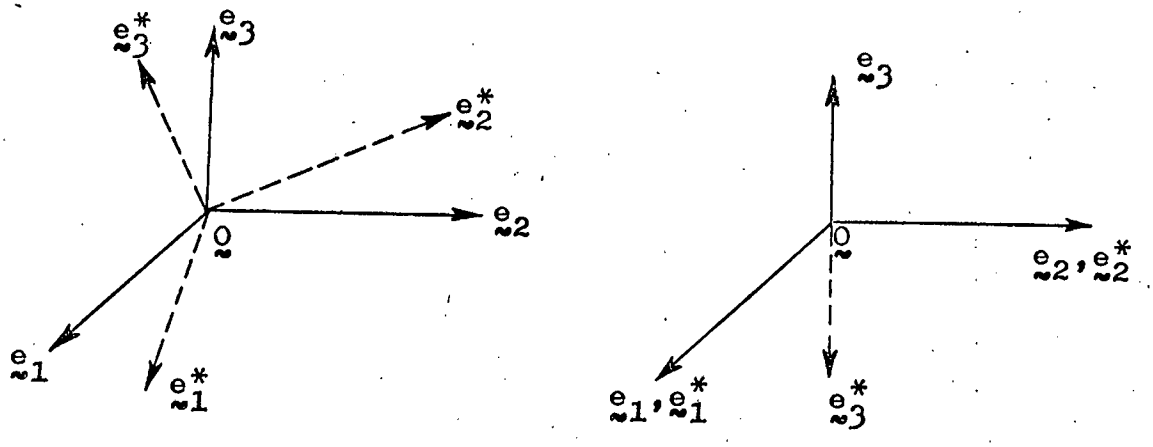

Fig. 4.2.1 - Transformações ortogonais de bases.

Enquanto que as rotações não mudam a orientação relativa dos versores base, a reflexão troca o sinal dessa orientação efetuando uma permutação ímpar no conjunto ordenado de V, $\mathbb{B} = \{\underset{\sim}{e}_1, \underset{\sim}{e}_2, \underset{\sim}{e}_3\}$. De acordo com (4.1.1), a transformação inversa de (4.2.1) é dada por

$$\underset{\sim}{e}_j = \underset{\sim}{Q}^T \underset{\sim}{e}_j^* \,. \tag{4.2.2}$$

Usando (3.6) vemos que

$$\underset{\sim}{e}_j = \underset{\sim}{Q}\, \underset{\sim}{e}_j^* = Q_{ij}\, \underset{\sim}{e}_i^* \,, \tag{4.2.3}$$

$$\underset{\sim}{e}_j^* = \underset{\sim}{Q}^T \underset{\sim}{e}_j = Q_{ji}\, \underset{\sim}{e}_i \,, \tag{4.2.4}$$

i.e., os componentes de $\underset{\sim}{Q}$ e $\underset{\sim}{Q}^T$ são dados, respectivamente, por

(4.2.5) $$Q_{ij} = \underset{\sim}{e}_i \cdot \underset{\sim}{Q}\, \underset{\sim}{e}_j = \underset{\sim}{e}_i \cdot \underset{\sim}{e}^*_j = \cos(\underset{\sim}{e}_i \cdot \underset{\sim}{e}^*_j),$$

(4.2.6) $$Q_{ji} = Q^T_{ij} = \underset{\sim}{e}^*_i \cdot \underset{\sim}{Q}^T \underset{\sim}{e}_j = \underset{\sim}{e}_j \cdot \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{e}^*_i = \underset{\sim}{e}^*_i \cdot \underset{\sim}{e}_j = \cos(\underset{\sim}{e}^*_i \cdot \underset{\sim}{e}_j).$$

Na notação Q_{ij} dos componentes de $\underset{\sim}{Q}$, qualquer letra que simbolize o primeiro índice refere-se sempre à base $\mathbb{B} = \{\underset{\sim}{e}_1, \underset{\sim}{e}_2, \underset{\sim}{e}_3\}$ e qualquer letra que simbolize o segundo índice refere-se à base $\mathbb{B}^* = \{\underset{\sim}{e}^*_1, \underset{\sim}{e}^*_2, \underset{\sim}{e}^*_3\}$ relacionada com $\mathbb{B}$ por (4.2.1).

Com (2.4.2) e (4.2.1), obtemos as seguintes expressões componentes de (4.1.2):

(4.2.7) $$\underset{\sim}{e}_j \cdot \underset{\sim}{e}_k = \delta_{jk} = Q_{ji}\, Q_{ki} = Q_{ji}\, \underset{\sim}{Q}^T_{ik},$$

(4.2.8) $$\underset{\sim}{e}^*_j \cdot \underset{\sim}{e}^*_k = \delta_{jk} = Q_{ji}\, Q_{ki} = Q_{ji}\, Q^T_{ki},$$

i.e.,

(4.2.9) $$\delta_{jk} = Q^T_{ji}\, Q_{ik} = Q_{ji}\, Q^T_{ik}.$$

Comumente dizemos que a transformação efetuada pelo tensor ortogonal $\underset{\sim}{Q}$ próprio ou impróprio é uma rotação, considerando que a refelxão é uma rotação (imprópria da base) de um dos versores base. Dizemos que as bases $\mathbb{B}$ e $\mathbb{B}^*$ são <u>bases rodadas</u>, sendo indiferente considerar uma ou outra como base primitiva.

4.3 - <u>Exemplo de rotação e reflexão de bases</u>.

Vejamos a representação matricial do tensor $\underset{\sim}{Q} \in \mathbb{O}^+$ que rodou uma base $\mathbb{B}$ em torno do eixo $(\underset{\sim}{e}_3)_{\underset{\sim}{o}}$, segundo um ângulo θ $(0 \leq \theta < 2\pi)$, no sentido anti-horário, considerado po-

sitivo (Fig. 4.3.1). De acordo com (4.2.5), os componentes de

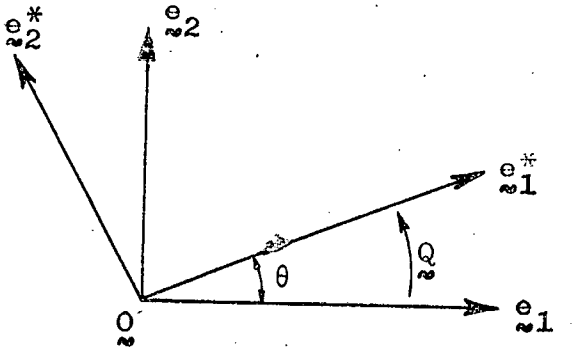

Fig. 4.3.1 - Rotação em torno do eixo $(x_3)_{\underset{\sim}{O}}$.

$\underset{\sim}{Q}$ são

$$Q_{11} = \cos\theta, \quad Q_{12} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\operatorname{sen}\theta, \quad Q_{13} = 0,$$

$$Q_{21} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{sen}\theta, \quad Q_{22} = \cos\theta, \quad Q_{23} = 0,$$

$$Q_{31} = 0, \quad Q_{32} = 0, \quad Q_{33} = \cos 0 = 1.$$

Então, a matriz de $\underset{\sim}{Q}$ é dada por

$$[\underset{\sim}{Q}] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.3.1}$$

Vemos que, nesse caso,

$$\det[\underset{\sim}{Q}] = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1.$$

Se a rotação é efetuada no sentido horário, considerado como negativo, os elementos da matriz em (4.3.1) que se alteram são

$$Q_{12} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{sen}\theta, \quad Q_{21} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\operatorname{sen}\theta,$$

enquanto que $\det[\underset{\sim}{Q}]$ permanece igual a um. Então, a rotação dita negativa é a rotação inversa efetuada pelo tensor transposto

$\underset{\sim}{Q}^T \in \mathbb{O}^+$.

Considerando a reflexão do eixo $(\underset{\sim}{e}_3)_{\mathcal{E}}$ no plano $(\underset{\sim}{e}_1, \underset{\sim}{e}_2)_{\mathcal{E}}$, temos:

$$\underset{\sim}{e}_1^* = \underset{\sim}{e}_1, \quad \underset{\sim}{e}_2^* = \underset{\sim}{e}_2, \quad \underset{\sim}{e}_3^* = -\underset{\sim}{e}_3,$$

e, de acordo com (4.2.5),

$$Q_{11} = \cos 0 = 1, \quad Q_{12} = 0, \quad Q_{13} = 0$$
$$Q_{21} = 0, \quad Q_{22} = 1, \quad Q_{23} = 0$$
$$Q_{31} = 0, \quad Q_{32} = 0, \quad Q_{33} = \cos \pi = -1.$$

Então, a matriz do tensor $\underset{\sim}{Q} \in \mathbb{O}$ que efetua essa reflexão é dada por

$$[\underset{\sim}{Q}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \tag{4.3.2}$$

e, nesse caso, $\det[\underset{\sim}{Q}] = -1$.

É fácil verificar que o conjunto dos tensores $\underset{\sim}{Q}$ que efetuam rotações em $\mathbb{E}$, em torno de um eixo, formam um grupo comutativo ou abeliano. De fato, se $\underset{\sim}{Q}_\theta$ e $\underset{\sim}{Q}_\alpha$ são duas rotações consecutivas em torno de um eixo, a "multiplicação" $\underset{\sim}{Q}_\theta \underset{\sim}{Q}_\alpha$ é expressa pela operação comutativa,

$$\underset{\sim}{Q}_\theta \underset{\sim}{Q}_\alpha = \underset{\sim}{Q}_\alpha \underset{\sim}{Q}_\theta = \underset{\sim}{Q}_\theta + \underset{\sim}{Q}_\alpha = \underset{\sim}{Q}_{\theta+\alpha} \tag{4.3.3}$$

O elemento identidade desse grupo é o tensor $\underset{\sim}{0}$ e o elemento inverso é o tensor $\underset{\sim}{Q}_\theta^T = \underset{\sim}{Q}_{-\theta}$, tal que

$$\underset{\sim}{Q}_\theta \underset{\sim}{Q}_\theta^T = \underset{\sim}{Q}_\theta^T \underset{\sim}{Q}_\theta = \underset{\sim}{Q}_\theta + \underset{\sim}{Q}_{-\theta} = \underset{\sim}{Q}_\theta = \underset{\sim}{0}. \tag{4.3.4}$$

O grupo dos tensores $\underset{\sim}{Q}$ que são composições de rotações em torno de um eixo e reflexões de um versor no plano dos

outros dois não é, entretanto, comutativo.

Para que um tensor ortogonal função contínua $\underset{\sim}{Q}_t = \underset{\sim}{Q}(t)$ de um parâmetro escalar t seja próprio é necessário e suficiente que seja obtido por transformação contínua do tensor identidade $\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{1}$. De fato, seja $\underset{\sim}{Q}_o = \underset{\sim}{1}$ o valor de $\underset{\sim}{Q}_t$ para $t = 0$. Como a função $\det \underset{\sim}{Q}_t$ é também uma função contínua de t cujos valores são $+1$ ou -1, concluimos que para $t \neq 0$ temos $\det \underset{\sim}{Q}_t = +1$ e $\underset{\sim}{Q}_t$ é próprio. Para provar a recíproca, i.e., que todo tensor ortogonal próprio pode ser obtido por transformação contínua de $\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{1}$, usamos o fato de que todo tensor ortogonal próprio admite a representação pela matriz (4.3.1) cujos elementos são funções contínuas de t.

4.4 - Transformações afins.

Uma transformação afim de $\mathbb{V}$ é uma função (não-linear) $\underset{\sim}{f}: D_{\mathbb{V}} \to \mathbb{V}$, definida por

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{v}) = \underset{\sim}{a} + \underset{\sim\sim}{T}\underset{\sim}{v}, \tag{4.4.1}$$

onde $\underset{\sim}{a} \in \mathbb{V}$ e $\underset{\sim}{T} \in \mathbb{L}$. Se $\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{1}$ a função

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{v}) = \underset{\sim}{a} + \underset{\sim}{v} \tag{4.4.2}$$

é chamada de translação de $\underset{\sim}{v}$ (ou de $D_{\mathbb{V}}$) por $\underset{\sim}{a}$. Se $\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{Q} \in \mathbb{O}$, a transformação afim ortogonal

$$\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{v}) = \underset{\sim}{a} + \underset{\sim\sim}{Q}\underset{\sim}{v} \tag{4.4.3}$$

é chamada de transformação rígida de $D_{\mathbb{V}}$. Essa transformação é a soma de uma translação com uma rotação (ou reflexão).

É fácil verificar que se $\underset{\sim}{T}$ é inversível, o conjunto das transformações afins (4.4.1) tem a estrutura de um grupo multiplicativo chamado de grupo afim de $\mathbb{V}$. As translações formam um grupo aditivo isomorfo ao grupo aditivo de $\mathbb{V}$ definido pelas regras (2.1.1). Esse grupo é chamado de grupo das translações de $\mathbb{V}$. Podemos verificar que o grupo linear dos tensores inversíveis e o grupo das translações são subgrupos do grupo afim.

4.5 - Rotação dos componentes de um vetor.

Consideremos no espaço $\mathbb{E}$, a rotação dos componentes de um raio vetor $\underset{\sim}{r}$ induzida pela rotação de uma base cartesiana $\mathbb{B}_{\underset{\sim}{o}}$. Essas rotações conoretizam as transformações ortogonais dos componentes de um vetor $\underset{\sim}{v} \in \mathbb{V}$, induzidas pela transformação ortogonal de uma base cartesiana $\mathbb{B} = \{\underset{\sim}{e}_i\}$.

Os componentes de $\underset{\sim}{r}$ iguais as coordenadas do ponto $\underset{\sim}{X}$ são simbolizadas por x_i na base $\mathbb{B}_o$ e por x'_i na base $\mathbb{B}^*_{\underset{\sim}{o}}$ (Fig. 4.5.1). Desdobrando $\underset{\sim}{r}$ em relação as duas bases,

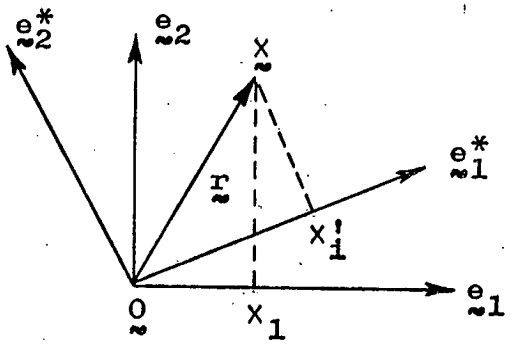

Fig. 4.5.1 - Rotação dos componentes de um vetor.

temos

(4.5.1) $$\underset{\sim}{r} = x_i \underset{\sim}{e}_i = x'_i \underset{\sim}{e}^*_i \ .$$

Para relacionar os componentes x_i e x'_i efetuamos os produtos escalares

(4.5.2) $$\underset{\sim}{r} \cdot \underset{\sim}{e}_j = x_j = x'_i \underset{\sim}{e}^*_i \cdot \underset{\sim}{e}_j \ ,$$

(4.5.3) $$\underset{\sim}{r} \cdot \underset{\sim}{e}^*_j = x'_j = x_i \underset{\sim}{e}_i \cdot \underset{\sim}{e}^*_j \ ,$$

onde $\underset{\sim}{e}_j \cdot \underset{\sim}{e}^*_i = Q_{ji}$ e $\underset{\sim}{e}_i \cdot \underset{\sim}{e}^*_j = Q_{ij}$. Então

(4.5.4) $$x_j = Q_{ji} x'_i \ ,$$

(4.5.5) $$x'_j = Q_{ij} x_i \ .$$

4.6 - Rotação e translação de bases.

Na Fig. 4.6.1, um ponto $\underset{\sim}{X}$ de $\mathbb{E}$ é assinalado em $\mathbb{E}_{\underset{\sim}{O}}$ pelo raio vetor $\underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{O}$ e em $\mathbb{E}_{\underset{\sim}{O}^*}$ pelo raio vetor $\underset{\sim}{\bar{r}} = \underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{O}^*$. As bases escolhidas, $\mathbb{B}_{\underset{\sim}{O}} = \{\underset{\sim}{e}_i\}$ e $\mathbb{B}^*_{\underset{\sim}{O}^*} = \{\underset{\sim}{e}^*_i\}_{\underset{\sim}{O}^*}$ diferem de uma rotação efetuada, em torno do eixo $(\underset{\sim}{e}_3)_{\underset{\sim}{O}}$ ou em torno do eixo $(\underset{\sim}{e}^*_3)_{\underset{\sim}{O}^*}$, pelo tensor $\underset{\sim}{Q}$ e, de uma translação efetuada pelo raio vetor $\underset{\sim}{b} = \underset{\sim}{O}^* - \underset{\sim}{O}$. As transformações por rotação em torno de um eixo e translação, são elementos de grupos comutativos, portanto, a ordem em que elas são efetuadas não altera o resultado final.

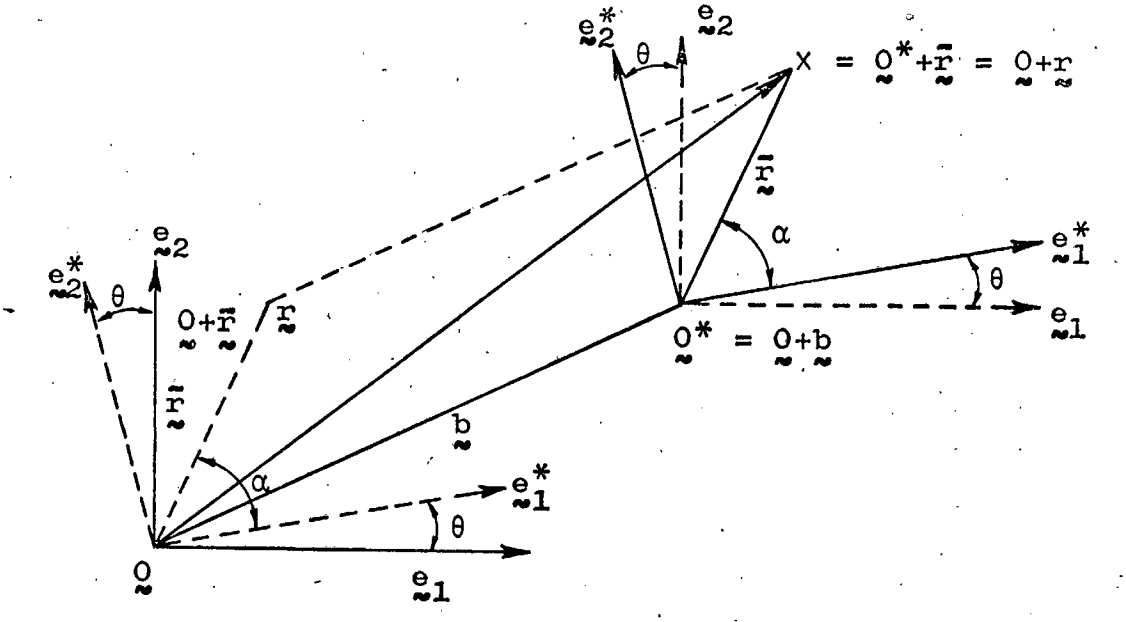

Fig. 4.6.1 - Rotação e translação de bases.

A relação entre os vetores $\underset{\sim}{r}$ e $\bar{\underset{\sim}{r}}$ é expressa por

$$\underset{\sim}{r} = \bar{\underset{\sim}{r}} + \underset{\sim}{b}, \tag{4.6.1}$$

tanto em $\mathbb{E}_{\underset{\sim}{O}}$ como em $\mathbb{E}_{\underset{\sim}{O}^*}$ como em V. Cada um dos vetores $\underset{\sim}{r}$, $\bar{\underset{\sim}{r}}$ e $\underset{\sim}{b}$ pode ter seus componentes referidos a qualquer das bases $\mathbb{B}_{\underset{\sim}{O}}$ ou $\mathbb{B}^*_{\underset{\sim}{O}^*}$. Desdobrando $\underset{\sim}{r}$ e $\underset{\sim}{b}$ na base $B_{\underset{\sim}{O}}$ e $\bar{\underset{\sim}{r}}$ na base $\mathbb{B}^*_{\underset{\sim}{O}^*}$, temos:

$$x_i \underset{\sim}{e}_i = b_i \underset{\sim}{e}_i + \bar{x}'_i \underset{\sim}{e}^*_i , \tag{4.6.2}$$

onde $\bar{x}'_i$ são os componentes de $\bar{\underset{\sim}{r}}$ em $\mathbb{B}^*_{\underset{\sim}{O}^*}$ ou em $\mathbb{B}^*_{\underset{\sim}{O}}$, iguais as coordenadas de $\underset{\sim}{X}$ em $B^*_{\underset{\sim}{O}^*}$ ou de $\underset{\sim}{O} + \bar{\underset{\sim}{r}}$ em $\mathbb{B}^*_{\underset{\sim}{O}}$. Efetuando o produto escalar com $\underset{\sim}{e}_j$, temos:

$$x_j = b_j + Q_{ji}\bar{x}'_i = b_j + \bar{x}_j, \tag{4.6.3}$$

onde

$$\bar{x}_j = Q_{ji}\bar{x}'_i \tag{4.6.4}$$

são os componentes de $\bar{\underset{\sim}{r}}$ em $\mathbb{B}_{\underset{\sim}{O}}$ ou $\mathbb{B}_{\underset{\sim}{O}^*}$. De (4.6.3) obtemos

(4.6.5) $$\bar{x}'_j = Q_{ij}(x_i - b_i).$$

4.7 - Rotação dos componentes de um tensor.

Os componentes de um tensor $\underset{\sim}{T}$ são T_{ij} na base $\mathbb{B}$ e T'_{ij} na base rodada $\mathbb{B}^*$, i.e.,

(4.7.1) $$\underset{\sim}{T} = T_{ij}\, \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j = T'_{ij}\, \underset{\sim}{e}^*_i \otimes \underset{\sim}{e}^*_j$$

De acordo com (3.2.3), (3.11.3) e (4.2.1), temos

$$T'_{ij} = \underset{\sim}{T}\cdot\underset{\sim}{e}^*_i \otimes \underset{\sim}{e}^*_j = \underset{\sim}{e}^*_i \cdot \underset{\sim}{T}\underset{\sim}{e}^*_j = Q\, \underset{\sim}{e}_i \cdot \underset{\sim}{T}\, \underset{\sim}{Q}\, \underset{\sim}{e}_j =$$

$$= \underset{\sim}{e}_i \cdot \underset{\sim}{Q}^T\, \underset{\sim}{T}\, \underset{\sim}{Q}\, \underset{\sim}{e}_j = Q_{ki}\, Q_{mj}\, T_{km},$$

i.e.,

(4.7.2) $$T'_{ij} = \underset{\sim}{T}\cdot\underset{\sim}{e}^*_i \otimes \underset{\sim}{e}^*_j = \underset{\sim}{e}^*_i \cdot \underset{\sim}{T}\underset{\sim}{e}^*_j = Q_{ki}\, T_{km}\, Q_{mj},$$

ou, em matrizes,

(4.7.3) $$[\underset{\sim}{T}]' = [\underset{\sim}{Q}^T][\underset{\sim}{T}][\underset{\sim}{Q}].$$

As matrizes $[\underset{\sim}{T}]$ e $[\underset{\sim}{T}]'$ do tensor $\underset{\sim}{T}$ são chamadas de <u>matrizes ortogonalmente semelhantes</u> ou de <u>matrizes rodadas</u> por $\underset{\sim}{Q} \in \mathbb{O}$.

Se $\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{Q}$ é um tensor ortogonal qualquer,

$$Q'_{ij} = \underset{\sim}{Q}\cdot\underset{\sim}{e}^*_i \otimes \underset{\sim}{e}^*_j = \underset{\sim}{e}^*_i \cdot \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{e}^*_j = \underset{\sim}{Q}\, \underset{\sim}{e}_i \cdot \underset{\sim}{Q}\, \underset{\sim}{Q}\, \underset{\sim}{e}_j =$$

$$= Q_{ik}\, \underset{\sim}{e}_k \cdot \underset{\sim}{Q}\, Q_{km}\, \underset{\sim}{e}_m = Q_{ki}\, Q_{mj}\, Q_{km},$$

i.e.,

(4.7.4) $$Q'_{ij} = Q_{ki}\, Q_{km}\, Q_{mj},$$

ou, de acordo com (4.2.9),

(4.7.5) $$Q'_{ij} = Q_{ij}.$$

A transformação de seus componentes por $(4.7.2)_3$ define o tensor cartesiano de segunda ordem. Um vetor é definido pela transformação (4.5.5) de seus componentes como um tensor cartesiano de primeira ordem.

4.8 - Transformações arbitrárias de bases.

A transformação de uma base não noessariamente ortogonal $\{\underset{\sim}{f}_i\}$ em outra $\{\bar{\underset{\sim}{f}}_i\}$ é efetuada por um tensor inversível (automorfismo) $\underset{\sim}{A}$, i.e.,

(4.8.1) $$\bar{\underset{\sim}{f}}_i = \underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{f}_i$$

e

(4.8.2) $$\underset{\sim}{f}_i = \underset{\sim}{A}^{-1}\,\bar{\underset{\sim}{f}}_i .$$

Um tensor $\underset{\sim}{T}$ é representado pela matriz $[\underset{\sim}{T}]_{\bar{\underset{\sim}{f}}}$ em relação à base $\bar{\underset{\sim}{f}}_i$ e pela matriz $[\underset{\sim}{T}]_{\underset{\sim}{f}}$ em relação à base $\{\underset{\sim}{f}_i\}$. Analogamente à (4.7.3), essas matrizes estão relacionadas por

(4.8.3) $$[\underset{\sim}{T}]_{\bar{\underset{\sim}{f}}} = [\underset{\sim}{A}^{-1}][\underset{\sim}{T}]_{\underset{\sim}{f}}\,[\underset{\sim}{A}],$$

e são chamadas de matrizes semelhantes.

4.9 - Definições equivalentes de um tensor.

1. Um tensor é uma função linear $\underset{\sim}{T}: V \to V$ definida pelas relações (3.1.3).

2. O tensor $\underset{\sim}{T}$ pode ser considerado como um vetor do espaço linear $\mathbb{L}(V,V)$.

3. O tensor $\underset{\sim}{T}$ pode ser definido pela matriz $[\underset{\sim}{T}]$ que o representa em relação a uma base de V.

4. Um tensor $\underset{\sim}{T}$ é invariante sob transformações de base; porém, sem componentes se transformam de acordo com (4.7.3) sob rotações de base.

5. O tensor $\underset{\sim}{T}$ pode ser definido por uma forma bilinear que é uma função escalar linear em dois vetores arbitrários $\underset{\sim}{r} = x_i \underset{\sim}{e}_i$ e $\underset{\sim}{p} = y_i \underset{\sim}{e}_i$, representada por

$$k = \ell(\underset{\sim}{r},\underset{\sim}{p}) = \underset{\sim}{r}\cdot\underset{\sim}{T}\underset{\sim}{p} = T_{ij}\, x_i\, y_j. \tag{4.9.1}$$

A expressão

$$\ell(x_i,y_i) = T_{ij}\, x_i\, y_j = \text{constante}, \tag{4.9.2}$$

representa uma superfície de segunda ordem, chamada de superfície tensorial que define o tensor $\underset{\sim}{T}$.

6. Pondo $\underset{\sim}{p} = \underset{\sim}{r}$ na forma bilinear, obtemos a forma quadrática,

$$k = \ell(\underset{\sim}{r},\underset{\sim}{r}) = \underset{\sim}{r}\cdot\underset{\sim}{T}\underset{\sim}{r} = T_{ij}\, x_i\, x_j, \tag{4.9.3}$$

e a superfície quádrica

$$\ell(x_i,x_i) = T_{ij}\, x_i\, x_j = \text{constante}. \tag{4.9.4}$$

que também definem o tensor $\underset{\sim}{T}$.

4.10 - Rotação de vetores e bases.

Para vizualizar a rotação de um vetor espacial $\underset{\sim}{v} \in \mathbb{V}$ vamos considerar a rotação de sua imagem isomorfa $\underset{\sim}{r} \in \mathbb{E}$ ligada a um ponto $\underset{\sim}{O}$. O tensor $\underset{\sim}{Q}$ roda o raio vetor $\underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{O}$ no raio vetor

(4.10.1) $$r^* = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{r},$$

onde $r^* = \underset{\sim}{x}^* - \underset{\sim}{O}$ (Fig. 4.10.1). A transformação inversa é dada

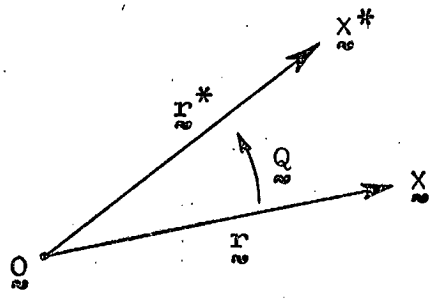

Fig. 4.10.1 - Rotação de vetor.

por

(4.10.2) $$\underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{Q}^T \underset{\sim}{x}^*.$$

Sendo isométrico, $\underset{\sim}{Q}$ não altera o comprimento de $\underset{\sim}{r}$, i.e., de acordo com (4.1.4) e (4.1.5), temos, respectivamente,

(4.10.3) $$\underset{\sim}{r}^* \cdot \underset{\sim}{r}^* = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{r} \cdot \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{r} \cdot \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{Q}^T\,\underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{r} \cdot \underset{\sim}{r},$$

(4.10.4) $$\|\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{r}\| = \|\underset{\sim}{r}\|.$$

Em relação a uma base cartesiana $\mathbb{B}_{\underset{\sim}{O}} = \{\underset{\sim}{e}_i\}$, construída no ponto $\underset{\sim}{O}$, (4.10.1) e (4.10.2) são expressos, respectivamente, por

(4.10.5) $$x_i^* = Q_{ij}\, x_j,$$

(4.10.6) $$x_i = Q_{ji}\, x_j^*.$$

Se $\underset{\sim}{Q}$ efetua em $\underset{\sim}{r}$ e $B_{\underset{\sim}{0}}$ a mesma rotação (Fig. 4.10.2), temos

$$\underset{\sim}{r}^* \cdot \underset{\sim}{e}_i^* = \underset{\sim}{r}^* \cdot \underset{\sim}{Q}\, \underset{\sim}{e}_i = \underset{\sim}{e}_i \cdot \underset{\sim}{Q}^T\, \underset{\sim}{r}^* = \underset{\sim}{r} \cdot \underset{\sim}{e}_i = x_i,$$

i.e.,

(4.10.7) $$\underset{\sim}{r}^* \cdot \underset{\sim}{e}_i^* = \underset{\sim}{r} \cdot \underset{\sim}{e}_i = x_i.$$

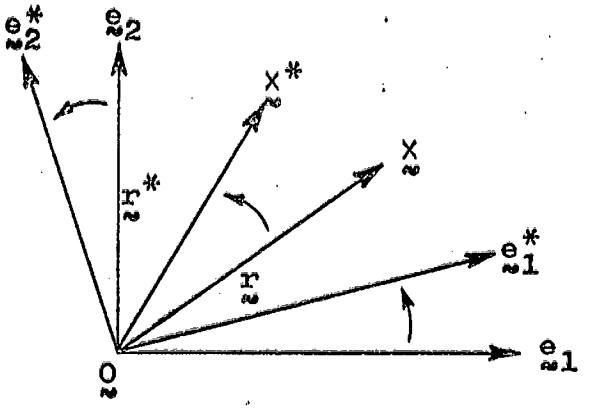

Fig. 4.10.2 - Rotação de vetores e bases.

Também de acordo com (3.7.1) e (4.5.3),

(4.10.8) $$\underset{\sim}{r} \cdot \underset{\sim}{e}_i^* = x_i' = \underset{\sim}{r} \cdot \underset{\sim}{Q}\, \underset{\sim}{e}_i = \underset{\sim}{e}_i \cdot \underset{\sim}{Q}^T \underset{\sim}{r},$$

i.e., uma certa alteração nos componentes de um vetor $\underset{\sim}{r}$ pode ser obtida pela rotação da base, $\underset{\sim}{Q}\, \underset{\sim}{e}_i$, ou pela rotação inversa do vetor, $\underset{\sim}{Q}^T\, \underset{\sim}{r}$.

4.11 - Deformações homogêneas.

A transformação afim $\underset{\sim}{f}: D_V \to V$ definida por (4.4.1) é concretizada pela chamada deformação homogênea $\underset{\sim}{\chi}: D_E \to E$ definida por

(4.11.1) $$\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{\chi}(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{X}_o + \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{x}_o),$$

onde $\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{x} \in E$ e $\underset{\sim}{F} \in L$. Se $\underset{\sim}{\chi}$ e $\underset{\sim}{F}$ são inversíveis, a deformação homogênea inversa é expressa por

(4.11.2) $$\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{\chi}^{-1}(\underset{\sim}{X}) = \underset{\sim}{x}_o + \underset{\sim}{F}^{-1}(\underset{\sim}{X}-\underset{\sim}{X}_o),$$

onde $\det \underset{\sim}{F} \neq 0$.

Se $\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{1}$ então,

(4.11.3) $$\underset{\sim}{\chi}(\underset{\sim}{x}) - \underset{\sim}{X}_o = \underset{\sim}{X}-\underset{\sim}{X}_o = \underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{x}_o$$

é a expressão de uma translação de D_E (Fig. 4.11.1).

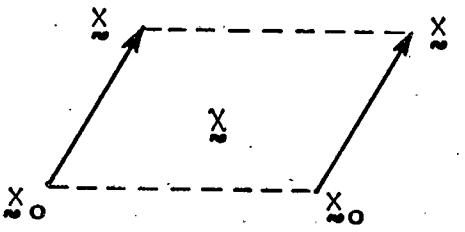

Fig. 4.11.1 - Translação de D_E.

Se $\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{Q} \in \mathbb{O}$, a deformação homogênea ortogonal é chamada de deformação rígida. Na Fig. 4.11.2 mostramos um exemplo de deformação rígida que é a superposição de uma rotação por $\underset{\sim}{Q} \in \mathbb{O}^+$ de um raio vetor $\underset{\sim}{X}-\underset{\sim}{O} \in E_Q$ em torno de um eixo que passa por $\underset{\sim}{O}$ com uma translação efetuada pelo vetor $\underset{\sim}{c}-\underset{\sim}{O}$. Em E_Q a soma de raios vetores definida por

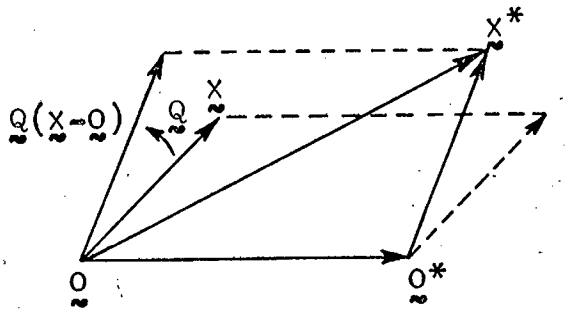

Fig. 4.11.2 - Rotação e translação de $\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{0}$.

$$\underset{\sim}{Q}(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{0}) + (\underset{\sim}{0}^*-\underset{\sim}{0}) = \underset{\sim}{x}^*-\underset{\sim}{0},$$

exprime a deformação rígida

$$\underset{\sim}{x}^* = \underset{\sim}{0}^* + \underset{\sim}{Q}(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{0}). \tag{4.11.4}$$

Se os pontos $\underset{\sim}{0}$ e $\underset{\sim}{0}^*$ coincidem, ficamos com (4.10.1) que exprime a rotação do raio vetor $\underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{0}$ no raio vetor $\underset{\sim}{r}^* = \underset{\sim}{x}^*-\underset{\sim}{0}$, em torno de um eixo que passa por $\underset{\sim}{0}$.

A equação (4.11.4) com $\underset{\sim}{Q} \in \mathbb{O}$ define deformações rígidas gerais que constituem um grupo não-comutativo (multiplicativo). Entretanto, se $\underset{\sim}{Q}$ efetua a rotação em torno de um eixo, o grupo das deformações rígidas é comutativo (aditivo). Por exemplo, na Fig. 4.11.2 o mesmo ponto $\underset{\sim}{x}^*$ é atingido transladando $\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{0}$ para o ponto de aplicação $\underset{\sim}{0}^*$ e depois rodando-o até $\underset{\sim}{x}^*-\underset{\sim}{0}^*$, em torno de um eixo que passa por $\underset{\sim}{0}^*$.

As deformações rígidas gerais são automorfismos de $\mathbb{E}$, pois, são funções inversíveis que não alteram distâncias entre pontos nem os ângulos entre os vetores tangentes que unem os pontos. De fato, de acordo com (2.2.4), a distância entre dois pontos $\underset{\sim}{x}_1$ e $\underset{\sim}{x}_2$ que sofreram uma deformação rígida (4.11.4) é um invariante sob transformação ortogonal, pois,

$$(\underset{\sim}{x}^*_2-\underset{\sim}{x}^*_1)\cdot(\underset{\sim}{x}^*_2-\underset{\sim}{x}^*_1) = \underset{\sim}{Q}(\underset{\sim}{x}_2-\underset{\sim}{x}_1)\cdot\underset{\sim}{Q}(\underset{\sim}{x}_2-\underset{\sim}{x}_1) = (\underset{\sim}{x}_2-\underset{\sim}{x}_1)\cdot(\underset{\sim}{x}_2-\underset{\sim}{x}_1),$$

ou,

$$\|\underset{\sim}{x}^*_2-\underset{\sim}{x}^*_1\| = \|\underset{\sim}{x}_2-\underset{\sim}{x}_1\|. \tag{4.11.5}$$

A deformação rígida é uma função tensorial que independe de bases arbitradas em E para referir as coordenadas dos pontos. Então, se escolhemos em $\underset{\sim}{0}$ uma base $\mathbb{B}_{\mathcal{E}} = \{\underset{\sim}{e}_i\}_{\mathcal{E}}$ e em $\underset{\sim}{0}^*$ uma base $\mathbb{B}^*_{\mathcal{E}^*} = \{\underset{\sim}{e}^*_i = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{e}_i\}_{\mathcal{E}^*}$ rodada pelo mesmo tensor $\underset{\sim}{Q}$ que rodou o raio vetor $\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{0}$, temos, tal como em (4.10.7),

$$x_i = (\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{0})\cdot\underset{\sim}{e}_i = (\underset{\sim}{x}^*-\underset{\sim}{0}^*)\cdot\underset{\sim}{e}_i = \underset{\sim}{Q}(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{0})\cdot\underset{\sim}{e}^*_i. \tag{4.11.6}$$

4.12 - Tensores semelhantes.

Consideremos um tensor $\underset{\sim}{T}: V \to V$ definido por

$$\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{T}\underset{\sim}{v} \tag{4.12.1}$$

e um outro tensor $\underset{\sim}{T}^*: V \to V$ definido por

$$\underset{\sim}{T}^*\underset{\sim}{v}^* = \underset{\sim}{u}^* \tag{4.12.2}$$

que transforma o vetor rodado

$$\underset{\sim}{v}^* = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{v} \tag{4.12.3}$$

no vetor rodado

$$\underset{\sim}{u}^* = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{u}, \tag{4.12.4}$$

conforme ilustrado na Fig. 4.12.1. De (4.12.2), obtemos

$$\underset{\sim}{T}^*\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{T}\underset{\sim}{v} \tag{4.12.5}$$

ou, como $\underset{\sim}{v}$ é arbitrário,

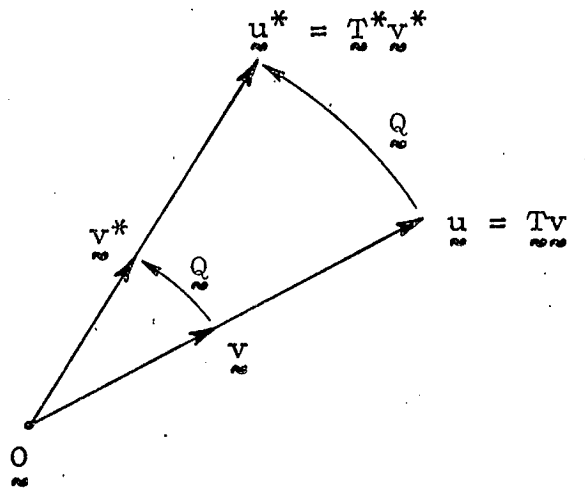

Fig. 4.12.1 - Tensores ortogonalmente semelhantes.

(4.12.6) $$\underset{\sim}{T}^* = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{T}\underset{\sim}{Q}^T.$$

Os tensores $\underset{\sim}{T}^*$ e $\underset{\sim}{T}$ assim relacionados são chamados de tensores (ortogonalmente) semelhantes ou de tensores rodados. Podemos dizer que o tensor rodado $\underset{\sim}{T}^*$ transforma o vetor rodado $\underset{\sim}{v}^*$ diretamente no vetor rodado $\underset{\sim}{u}^*$ mas, essa mesma transformação pode ser obtida indiretamente com o tensor primitivo $\underset{\sim}{T}$ transformando $\underset{\sim}{v}$ em $\underset{\sim}{u}$ e depois rodando esse vetor até $\underset{\sim}{u}^*$.

Um tensor isotrópico é definido como aquele que não se altera por transformação ortogonal, i.e., $\underset{\sim}{T}$ é isotrópico quando

(4.12.7) $$\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{T}\underset{\sim}{Q}^T.$$

Os tensores isotrópico são representados pelos tensores escalares ou esféricos,

(4.12.8) $$\underset{\sim}{T} = k\underset{\sim}{1}, \quad k \in R.$$

A transformação expressa pelo segundo membro de (4.12.6) é cha-

mada de transformação de semelhança ortogonal. De um modo geral, uma transformação de semelhança efetuada pelo tensor inversível $\underset{\sim}{A}$ definido em (4.8.1), é dada por

$$\bar{\underset{\sim}{T}} = \underset{\sim}{A}\underset{\sim}{T}\underset{\sim}{A}^{-1}, \tag{4.12.9}$$

onde $\underset{\sim}{T}$ e $\bar{\underset{\sim}{T}}$ são tensores semelhantes.

4.13 - Componentes dos tensores semelhantes.

Para que dois tensores sejam semelhantes é necessário e suficiente que existam bases em relação as quais ambos sejam representados pela mesma matriz. Mostremos que o tensor rodado $\underset{\sim}{T}^*$ tem em relação a base rodada $B^* = \{\underset{\sim}{e}_i^*\}$ os mesmos componentes (ou é representado pela mesma matriz) que o tensor primitivo $\underset{\sim}{T}$ na base primitiva $B = \{\underset{\sim}{e}_i\}$. De fato, usando a definição de tensor transposto (3.7.1), temos

$$\underset{\sim}{T}^* \cdot \underset{\sim}{e}_i^* \otimes \underset{\sim}{e}_j^* = \underset{\sim}{e}_i^* \cdot \underset{\sim}{T}\, \underset{\sim}{e}_j^* = \underset{\sim}{Q}\, \underset{\sim}{e}_i \cdot \underset{\sim}{Q}\, \underset{\sim}{T}\, \underset{\sim}{Q}^T \underset{\sim}{Q}\, \underset{\sim}{e}_j =$$

$$= \underset{\sim}{T}\, \underset{\sim}{e}_j \cdot \underset{\sim}{Q}^T \underset{\sim}{Q}\, \underset{\sim}{e}_i = \underset{\sim}{e}_i \cdot \underset{\sim}{T}\, \underset{\sim}{e}_j = \underset{\sim}{T} \cdot \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j = T_{ij},$$

i.e., resumindo,

$$\underset{\sim}{T}^* \cdot \underset{\sim}{e}_i^* \otimes \underset{\sim}{e}_j^* = \underset{\sim}{T} \cdot \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j = T_{ij}, \tag{4.13.1}$$

expressão análoga a (4.10.7) que estabeleceu a igualdade entre $\underset{\sim}{x}^* \cdot \underset{\sim}{e}_i^*$ e $\underset{\sim}{x} \cdot \underset{\sim}{e}_i = x_i$. Então, o tensor rodado $\underset{\sim}{T}^*$ é expresso em relação a base rodada $\underset{\sim}{e}_i^* \otimes \underset{\sim}{e}_j^*$ de $\mathbb{L}$ pela combinação linear

$$\underset{\sim}{T}^* = T_{ij}\, \underset{\sim}{e}_i^* \otimes \underset{\sim}{e}_j^*. \tag{4.13.2}$$

Podemos também chegar a uma expressão análoga a

(4.10.8):

$$\underset{\sim}{T}\cdot\underset{\sim}{e}_i^* \otimes \underset{\sim}{e}_j^* = \underset{\sim}{e}_i^*\cdot\underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{e}_j^* = T'_{ij} = \underset{\sim}{T}\cdot\underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{e}_j =$$

$$= \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{e}_i\cdot\underset{\sim\sim}{TQ}\,\underset{\sim}{e}_j = \underset{\sim}{e}_i\cdot\underset{\sim}{Q}^T\underset{\sim\sim}{TQ}\,\underset{\sim}{e}_j = \underset{\sim}{Q}^T\,\underset{\sim\sim}{TQ}\cdot\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j.$$

ou, resumindo,

$$(4.13.3) \qquad T'_{ij} = \underset{\sim}{T}\cdot\underset{\sim}{e}_i^* \otimes \underset{\sim}{e}_j^* = \underset{\sim}{Q}^T\underset{\sim\sim}{TQ}\cdot\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j.$$

Esse resultado mostra que novos componentes rodados de um tensor $\underset{\sim}{T}$ podem ser obtidos por rotação da base de B para B^* ou por rotação inversa do tensor expressa por $\underset{\sim}{Q}^T\underset{\sim\sim}{TQ}$. Em (4.7.3) mostramos que os componentes do tensor rodado $\underset{\sim}{Q}^T\underset{\sim\sim}{TQ}$ na base $\mathbb{B}$ são dados por T'_{ij}.

4.14 - Relações de semelhança.

As classes de tensores semelhantes de um espaço vetorial $\mathbb{L}$ (e de suas matrizes semelhantes de $\mathbb{R}^9$) e as classes de elementos conjugados de um grupo $\mathbb{G}_i$, são exemplos de classes de equivalência. As relações de semelhança entre tensores de um espaço vetorial tem as propriedades transitiva, simétrica e reflexiva, equivalentes as expressas, respectivamente por (1.4.1), (1.4.2) e (1.4.3) para o caso de elementos conjugados de um grupo.

Consideremos agora algumas propriedades de tensores semelhantes e das relações de semelhança.

1. Se $\underset{\sim}{T}$ é uma soma de tensores, temos

$$(4.14.1) \qquad \underset{\sim}{Q}(\underset{\sim}{T}_1+\underset{\sim}{T}_2+\ldots+\underset{\sim}{T}_m)\underset{\sim}{Q}^T = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{T}_1\underset{\sim}{Q}^T+\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{T}_2\underset{\sim}{Q}^T+\ldots+\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{T}_m\underset{\sim}{Q}^T =$$

$$= \underset{\sim}{T}_1^* + \underset{\sim}{T}_2^* + \ldots + \underset{\sim}{T}_m^*,$$

mostrando que a transformação de semelhança de uma soma de tensores é a soma das transformações das parcelas.

2. Se $\underset{\sim}{T}$ é um produto de tensores, temos

$$(4.14.2) \qquad \underset{\sim}{Q}(\underset{\sim}{T}_1\underset{\sim}{T}_2\ldots\underset{\sim}{T}_m)\underset{\sim}{Q}^T = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{T}_1\underset{\sim}{Q}^T\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{T}_2\underset{\sim}{Q}^T \ldots \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{T}_m\underset{\sim}{Q}^T =$$

$$= \underset{\sim}{T}_1^*\underset{\sim}{T}_2^* \ldots \underset{\sim}{T}_m^*,$$

mostrando que a transformação do produto de tensores é o produto das transformações desses tensores.

3. Se no caso anterior $\underset{\sim}{T}_1 = \ldots = \underset{\sim}{T}_m$ temos

$$(4.14.3) \qquad \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{T}^m\underset{\sim}{Q}^T = (\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{T}\underset{\sim}{Q}^T)^m = (\underset{\sim}{T}^*)^m,$$

i.e., a transformação da potência de um tensor é a potência da transformação desse tensor, ou seja, para efetuar a transformação de um tensor elevado a uma certa potência, basta transformar sua primeira potênoia. Se $\underset{\sim}{T}$ é inversível, esse resultado é válido também para as potências inteiras negativas.

4. Como resultado das propriedades anteriores, se $\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T})$ é um polinômio como em (3.5.1), temos

$$(4.14.4) \qquad \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T})\underset{\sim}{Q}^T = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{T}\underset{\sim}{Q}^T) = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T}^*),$$

i.e., a transformação de semelhança de um polinômio em $\underset{\sim}{T}$ é igual ao polinômio no tensor transformado.

5. Tensores semelhantes têm as mesmas propriedades geométricas, pois, usando (3.8.8) vemos que

$$(4.14.5) \qquad \underset{\sim}{T}^{*}\cdot\underset{\sim}{T}^{*} = \mathrm{tr}(\underset{\sim}{T}^{*}(\underset{\sim}{T}^{*})^{T}) = \mathrm{tr}(\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{T}\underset{\sim}{Q}^{T}\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{T}^{T}\underset{\sim}{Q}) =$$

$$= \mathrm{tr}(\underset{\sim}{T}\underset{\sim}{T}^{T}) = \underset{\sim}{T}\cdot\underset{\sim}{T},$$

i.e., que o produto interno que define as propriedades geométricas de um tensor é um invariante sob uma transformação de semelhança ortogonal. Podemos verificar entretanto que o produto interno não é invariante sob uma transformação geral de semelhança efetuada com o tensor inversível $\underset{\sim}{A}$, definida em (4.12.9). De (4.14.5) vemos que tensores semelhantes têm o mesmo módulo, i.e.,

$$(4.14.6) \qquad \|\underset{\sim}{T}\| = \|\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{T}\underset{\sim}{Q}^{T}\| = \|\underset{\sim}{T}^{*}\|.$$

Essas duas últimas expressões são análogas, respectivamente, a (4.1.4) e (4.1.5).

6. Tensores semelhantes têm o mesmo traço, pois,

$$(4.14.7) \qquad \mathrm{tr}\ \underset{\sim}{T}^{*} = \mathrm{tr}(\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{T}\underset{\sim}{Q}^{T}) = \mathrm{tr}(\underset{\sim}{Q}^{T}\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{T}) = \mathrm{tr}(\underset{\sim}{1}\underset{\sim}{T}) = \mathrm{tr}\ \underset{\sim}{T}.$$

7. Tensores semelhantes têm também o mesmo determinante:

$$(4.14.8) \qquad \det \underset{\sim}{T}^{*} = \det(\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{T}\underset{\sim}{Q}^{T}) = \det(\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{Q}^{T})\det \underset{\sim}{T} = \det \underset{\sim}{T}.$$

Podemos verificar que essas duas últimas propriedades são também válidas para os tensores semelhantes $\underset{\sim}{T}$ e $\bar{\underset{\sim}{T}}$ relacionados por (4.12.9).

Todas essas propriedades, conforme o caso, podem ser estendidas as matrizes semelhantes ou ortogonalmente semelhantes e as relações de semelhança respectivas.

As propriedades transitiva, simétrica e reflexiva que caracterizam relações de equivalência em geral, colocam os tensores semelhantes e as matrizes que os representam em classes de semelhança. Cada classe de semelhança é representada por um único tensor cuja matriz tem uma forma relativamente simples chamada de forma canônica.

CAPÍTULO 5

PRODUTO VETORIAL

5.1 - Produto vetorial

O produto vetorial de dois vetores $\underset{\sim}{u},\underset{\sim}{v} \in \mathbb{V}$ é o vetor de $\mathbb{V}$ simbolizado por $\underset{\sim}{u}\times\underset{\sim}{v}$ e definido em relação a uma base $\mathcal{B}$ que orienta $\mathbb{V}$, por

$$\underset{\sim}{u}\times\underset{\sim}{v} = \varepsilon_{ijk}\, u_i v_j\, \underset{\sim}{e}_k, \tag{5.1.1}$$

onde ε_{ijk} é o permutador ou alternador cujos valores são:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{Bmatrix} +1 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ se } (i,j,k) \begin{cases} \text{é permutação par} \\ \text{é permutação ímpar} \\ \text{não é permutação} \end{cases} \text{de } (1,2,3) \tag{5.1.2}$$

Pondo em (5.1.1), $\underset{\sim}{u} = u_i \underset{\sim}{e}_i$ e $\underset{\sim}{v} = v_j \underset{\sim}{e}_j$, resulta que

$$\underset{\sim}{e}_i \times \underset{\sim}{e}_j = \varepsilon_{ijk}\, \underset{\sim}{e}_k \tag{5.1.3}$$

e daí que

$$\varepsilon_{ijk} = \underset{\sim}{e}_i \times \underset{\sim}{e}_j \cdot \underset{\sim}{e}_k. \tag{5.1.4}$$

A partir dessa última equação, resultam as seguintes expressões que relacionam o permutador com o delta de Kronecker:

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{mnp} = (\underset{\sim}{e}_i \times \underset{\sim}{e}_j \cdot \underset{\sim}{e}_k)(\underset{\sim}{e}_m \times \underset{\sim}{e}_n \cdot \underset{\sim}{e}_p) = \tag{5.1.5}$$

$$= \begin{vmatrix} \underset{\sim}{e}_i\cdot\underset{\sim}{e}_m & \underset{\sim}{e}_i\cdot\underset{\sim}{e}_n & \underset{\sim}{e}_i\cdot\underset{\sim}{e}_p \\ \underset{\sim}{e}_j\cdot\underset{\sim}{e}_m & \underset{\sim}{e}_j\cdot\underset{\sim}{e}_n & \underset{\sim}{e}_j\cdot\underset{\sim}{e}_p \\ \underset{\sim}{e}_k\cdot\underset{\sim}{e}_m & \underset{\sim}{e}_k\cdot\underset{\sim}{e}_n & \underset{\sim}{e}_k\cdot\underset{\sim}{e}_p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{im} & \delta_{in} & \delta_{ip} \\ \delta_{jm} & \delta_{jn} & \delta_{jp} \\ \delta_{km} & \delta_{kn} & \delta_{kp} \end{vmatrix};$$

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{mnk} = (e_i \times e_j)\cdot(e_m \times e_n) = \delta_{im}\,\delta_{jn} - \delta_{in}\,\delta_{jm}; \tag{5.1.6}$$

(5.1.7) $$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{mjk} = (e_i \times e_j)\cdot(e_i \times e_j) = 2\,\delta_{im};$$

(5.1.8) $$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ijk} = (e_i \times e_j)\cdot(e_i \times e_j) = 2\,\delta_{ii} = 6\,.$$

Em (5.1.5), cada determinante é um <u>determinante de Gramn</u> de três versores base, igual ao quadrado do volume do paralelepípedo sobre esses versores.

5.2 - <u>Propriedades do produto vetorial</u>

A partir de sua definição (5.1.1) e das relações entre o permutador e o delta de Kronecker podemos chegar às seguintes propriedades do produto vetorial:

1. O produto vetorial $\underset{\sim}{u}\times\underset{\sim}{v}$ é um vetor perpendicular ao plano de $\underset{\sim}{u}$ e $\underset{\sim}{v}$. De fato,

(5.2.1) $$\underset{\sim}{u}\cdot(\underset{\sim}{u}\times\underset{\sim}{v}) = \underset{\sim}{v}\cdot(\underset{\sim}{u}\times\underset{\sim}{v}) = \varepsilon_{ijk}\,u_i\,v_j\,u_k) =$$

$$= \varepsilon_{ijk}\,u_i\,v_j\,v_k) = 0,$$

pois, $u_i u_k$ e $v_j v_k$ são simétricos em relação aos índices i,k e j,k e ε_{ijk} é antissimétrico em relação a esses índices.

2. O comprimento do produto vetorial é dado por

(5.2.2) $$\|\underset{\sim}{u}\times\underset{\sim}{v}\| = \|\underset{\sim}{u}\|\,\|\underset{\sim}{v}\|\ \text{sen}\ (\underset{\sim}{u},\underset{\sim}{v}),$$

pois,

$$(\underset{\sim}{u}\times\underset{\sim}{v})\cdot(\underset{\sim}{u}\times\underset{\sim}{v}) = (\underset{\sim}{u}\times\underset{\sim}{v})^2 = \varepsilon_{ijk}\,e_{imn}\,u_j\,v_k\,u_m\,v_n =$$

$$= (\delta_{jm}\,\delta_{km} - \delta_{jn}\,\delta_{km})u_j\,v_k\,u_m\,v_n = u_j\,u_j\,v_k\,v_k - u_j\,v_j\,u_k\,v_k =$$

$$= (\underset{\sim}{u}\cdot\underset{\sim}{u})(\underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{v}) - (\underset{\sim}{u}\cdot\underset{\sim}{v})^2 = \|\underset{\sim}{u}\|^2\|\underset{\sim}{v}\|^2 - \|\underset{\sim}{u}\|^2\|\underset{\sim}{v}\|^2\ \cos^2(\underset{\sim}{u}\cdot\underset{\sim}{v}) =$$

$$= \|\underset{\sim}{u}\|^2 \|\underset{\sim}{v}\|^2 \, (1 - \cos^2(\underset{\sim}{u},\underset{\sim}{v})),$$

daí resultando (5.2.2). Se $\underset{\sim}{u}$ e $\underset{\sim}{v}$ são perpendiculares,

$$\|u \times v\| = \|u\| \|v\| . \tag{5.2.3}$$

As equações (5.2.2) e (5.2.3) mostram que $\|\underset{\sim}{u} \times \underset{\sim}{v}\|$ é a área do paralelogramo cujos lados são $\underset{\sim}{u}$ e $\underset{\sim}{v}$.

3. O vetor $\underset{\sim}{u} \times \underset{\sim}{v}$ sendo normal ao paralelogramo de área $\|\underset{\sim}{u} \times \underset{\sim}{v}\|$, é altura de um paralelepípedo (Fig. 5.2.1) de volume igual a

$$(\underset{\sim}{u} \times \underset{\sim}{v}) \cdot (\underset{\sim}{u} \times \underset{\sim}{v}) = (\underset{\sim}{u} \times \underset{\sim}{v})^2 = \varepsilon_{ijk} \, u_i v_j \, (\underset{\sim}{u} \times \underset{\sim}{v})_k = \tag{5.2.4}$$

$$= \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & (u \times v)_1 \\ u_2 & v_2 & (u \times v)_2 \\ u_3 & v_3 & (u \times v)_3 \end{vmatrix} .$$

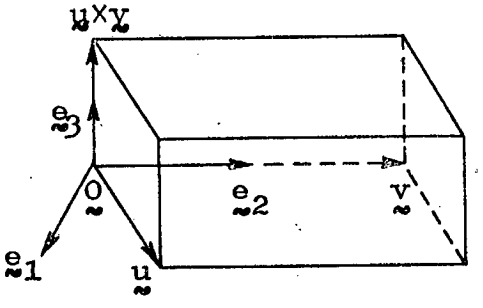

Fig. 5.2.1 - Paralelepípedo de volume $(\underset{\sim}{u} \times \underset{\sim}{v})^2$.

Vemos que os elementos do conjunto $\{\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{u} \times \underset{\sim}{v}\}$ estão na mesma ordem que os versores da base $\mathbb{B} = \{\underset{\sim}{e}_1, \underset{\sim}{e}_2, \underset{\sim}{e}_3\}$ escolhida para V, i.e., o conjunto ordenado $\{\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{u} \times \underset{\sim}{v}\}$ tem a mesma orientação que o espaço V. Então, o produto vetorial $\underset{\sim}{u} \times \underset{\sim}{v}$ pode ser definido univocamente pelo desdobramento (8.1.1) em relação a uma certa base $\mathbb{B}$ de V orientado ou pelas três propriedades

espressas por (5.2.1), (5.2.2) e (5.2.4). Em (5.2.4) o volume $(\underset{\sim}{u}\times\underset{\sim}{v})^2$ é um número positivo, de sorte que, de fato, o valor de ε_{ijk} fixado por (5.1.4) em função da orientação da base $\mathbb{B}$, fixa a orientação do vetor $\underset{\sim}{u}\times\underset{\sim}{v}$ em relação a $\underset{\sim}{u}$ e $\underset{\sim}{v}$, como positiva ou negativa.

Com o auxílio do desdobramento (5.1.1) podemos demonstrar facilmente as seguintes propriedades adicionais do produto vetorial para quaisquer $\underset{\sim}{u},\underset{\sim}{v},\underset{\sim}{w} \in V$ e $a \in \mathbb{R}$:

(5.2.5) $\underset{\sim}{u}\times\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{0}$, se $\underset{\sim}{u}$ e $\underset{\sim}{v}$ são linearmente dependentes,

(5.2.6) $\underset{\sim}{u}\times\underset{\sim}{v} \neq \underset{\sim}{0}$, se $\underset{\sim}{u}$ e $\underset{\sim}{v}$ são linearmente independentes,

(5.2.7) $\underset{\sim}{u}\times\underset{\sim}{v} = -\underset{\sim}{v}\times\underset{\sim}{u}$,

(5.2.8) $\underset{\sim}{u}\times(\underset{\sim}{w}+\underset{\sim}{v}) = \underset{\sim}{u}\times\underset{\sim}{w} + \underset{\sim}{u}\times\underset{\sim}{v}$,

(5.2.9) $a(\underset{\sim}{u}\times\underset{\sim}{v}) = a\underset{\sim}{u}\times\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{u}\times a\underset{\sim}{v}$,

(5.2.10) $\pm v = \underset{\sim}{u}\times\underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{w} = \varepsilon_{ijk}\, u_i v_j w_k = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$,

(5.2.11) $\underset{\sim}{u}\times(\underset{\sim}{v}\times\underset{\sim}{w}) = (u\cdot w)v - (u\cdot v)w$,

(5.2.12) $(\underset{\sim}{u}\times\underset{\sim}{v})\times\underset{\sim}{w} = (\underset{\sim}{w}\cdot\underset{\sim}{u})\underset{\sim}{v} - (\underset{\sim}{w}\cdot\underset{\sim}{v})\underset{\sim}{u}$.

O produto escalar (5.2.10) é chamado de <u>produto misto</u> e seu valor é $\pm v$, onde $|v|$ é o volume do paralelepípedo de arestas $\underset{\sim}{u}$, $\underset{\sim}{v}$ e $\underset{\sim}{w}$ (Fig. 5.2.2). O sinal de v é fixado pela orientação do conjunto de vetores $\{\underset{\sim}{u},\underset{\sim}{v},\underset{\sim}{w}\}$ em relação à orientação do espaço vetorial V.

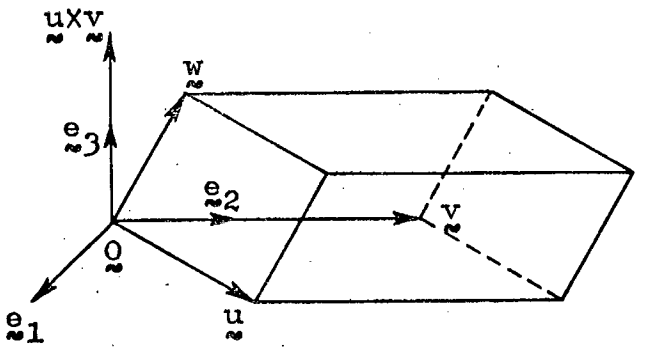

Fig. 5.2.2 - Paralelepípedo de volume $|v| = |u \times v \cdot w|$.

Os produtos vetoriais (5.2.11) e (5.2.12) são chamados de duplos produtos vetoriais.

As propriedades expressas por (5.2.8) e (5.2.9) definem o produto vetorial como uma função bilinear de u e v e (5.2.7) diz que essa função é antissimétrica em u e v.

A linearidade em v, por exemplo, significa que para um vetor a fixo em V, existe a função linear (tensor) $T: V \to V$ definida para cada $v \in V$ por

$$Tv = a \times v. \tag{5.2.13}$$

A definição do produto misto por (5.2.10) mostra que esse produto é uma função escalar trilinear e antissimétrica nas três variáveis u, v e w. Essa função tem valor zero se e somente quando os vetores u, v e w forem linearmente dependentes.

Finalmente, as propriedades (5.2.11) e (5.2.12) mostram que o produto vetorial não é uma operação associativa.

5.3 - Vetor de tensor antissimétrico

No espaço tridimensional existe uma correspondência biunívoca entre vetores e tensores antissimétricos. Se a dimensão do espaço é d, o número de componentes independentes de um vetor é de um tensor antissimétrico é, respectivamente, d e $(d^2-d)/2 = d(d-1)/2$. Então, é somente em três dimensões que ambos o vetor e o tensor antissimétrico têm três componentes independentes.

A associação entre o tensor antissimétrico $\underset{\sim}{W}$ e o vetor desse tensor, $\underset{\sim}{w} = \text{vet}\ \underset{\sim}{W}$, é dada por

$$\underset{\sim}{W}\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{w}\times\underset{\sim}{v}, \tag{5.3.1}$$

ou, em componentes,

$$W_{ij} = -\epsilon_{ijk}\, w_k, \tag{5.3.2}$$

onde W_{ij} representa os componentes do <u>tensor do vetor</u>, $\underset{\sim}{W} = \text{tens}\ \underset{\sim}{w}$. Usando (5.3.2) chegamos a expressão dos componentes do <u>vetor do tensor</u>, $\underset{\sim}{w} = \text{vet}\ \underset{\sim}{W}$,

$$w_i = -\frac{1}{2}\,\epsilon_{ijk}\, W_{jk}. \tag{5.3.3}$$

De (5.3.2) obtemos a representação matricial de $\underset{\sim}{W}$,

$$[\underset{\sim}{W}] = \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.3.4}$$

e de (5.3.3) os componentes de $\underset{\sim}{w}$,

$$(5.3.5)\qquad \begin{cases} w_1 = (W_{32} - W_{23})/2, \\ w_2 = (W_{13} - W_{31})/2, \\ w_3 = (W_{21} - W_{12})/2. \end{cases}$$

O vetor do tensor, $\underset{\sim}{w} = \text{vet}\ \underset{\sim}{W}$, é também chamado de <u>vetor axial</u> de $\underset{\sim}{W}$.

Substituindo em (5.3.3) os componentes de

$$\underset{\sim}{W} = \text{ant}\ (\underset{\sim}{u}\otimes\underset{\sim}{v}) = \frac{1}{2}\ (\underset{\sim}{u}\otimes\underset{\sim}{v} - \underset{\sim}{v}\otimes\underset{\sim}{u}),$$

que são

$$W_{jk} = \frac{1}{2}\ (u_j v_k - v_j u_k),$$

obtemos

$$w_i = -\frac{1}{2}\,\epsilon_{ijk}\left(\frac{1}{2}\ (u_j v_k - v_j u_k)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ ((\underset{\sim}{v}\times\underset{\sim}{u})_i - (\underset{\sim}{u}\times\underset{\sim}{v})_i)\right) = \frac{1}{2}\ (\underset{\sim}{v}\times\underset{\sim}{u})_i,$$

i.e., o vetor do tensor $\underset{\sim}{W} = \text{ant}\ \underset{\sim}{u}\otimes\underset{\sim}{v}$ é dado por

$$(5.3.6)\qquad \underset{\sim}{w} = \frac{1}{2}\ \underset{\sim}{v}\times\underset{\sim}{u}.$$

Então, de acordo com (5.3.1), temos

$$(5.3.7)\qquad (\underset{\sim}{u}\otimes\underset{\sim}{v} - \underset{\sim}{v}\otimes\underset{\sim}{u})\underset{\sim}{a} = (\underset{\sim}{v}\times\underset{\sim}{u})\times\underset{\sim}{a},$$

para qualquer $\underset{\sim}{a} \in V$.

Para quaisquer $\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{S} + \underset{\sim}{W}$ e $\underset{\sim}{v}$, temos a transformação

$$(5.3.8)\qquad \underset{\sim\sim}{T}\underset{\sim}{v} = \underset{\sim\sim}{S}\underset{\sim}{v} + \underset{\sim\sim}{W}\underset{\sim}{v} = \underset{\sim\sim}{S}\underset{\sim}{v} + \underset{\sim}{w}\times\underset{\sim}{v},$$

chamada de <u>transformação de Stokes</u>.

5.4 - Determinante de um tensor

O determinante de um tensor $\underset{\sim}{T}: V \to V$ é uma função escalar $f: D_{\mathbb{L}} \to \mathbb{R}$, simbolizada por $f(\underset{\sim}{T}) = \det \underset{\sim}{T}$. Em termos dos componentes de $\underset{\sim}{T}$ e do permutador, a função $\det \underset{\sim}{T}$ pode ser definida pelas seguintes expressões equivalentes:

$$(5.4.1) \qquad \varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{pqr}\det \underset{\sim}{T} = \begin{vmatrix} T_{ip} & T_{iq} & T_{ir} \\ T_{jp} & T_{jq} & T_{jr} \\ T_{kp} & T_{kq} & T_{kr} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} T_{pi} & T_{qi} & T_{ri} \\ T_{rj} & T_{qj} & T_{rj} \\ T_{pk} & T_{qk} & T_{rk} \end{vmatrix} ;$$

$$(5.4.2) \qquad \varepsilon_{ijk}\det \underset{\sim}{T} = \varepsilon_{pqr}\,T_{ip}\,T_{jq}\,T_{kr} = \varepsilon_{pqr}\,T_{pi}\,T_{qr}\,T_{rk} =$$

$$= \begin{vmatrix} T_{i1} & T_{i2} & T_{i3} \\ T_{j1} & T_{j2} & T_{j3} \\ T_{k1} & T_{k2} & T_{k3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} T_{1i} & T_{2i} & T_{3i} \\ T_{1j} & T_{2j} & T_{3j} \\ T_{1k} & T_{2k} & T_{3k} \end{vmatrix} ;$$

$$(5.4.3) \qquad \det \underset{\sim}{T} = \frac{1}{6}\,\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{jqr}\,T_{ip}\,T_{jq}\,T_{kr} =$$

$$= \frac{1}{6}\,\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{pqr}\,T_{pi}\,T_{qj}\,T_{rk} =$$

$$= \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{vmatrix} .$$

Dessas expressões podemos tirar as seguintes propriedades de $\det \underset{\sim}{T}$:

(5.4.4) $$\det \underset{\sim}{1} = 1,$$

(5.4.5) $$\det \underset{\sim}{T} = \det \underset{\sim}{T}^T,$$

(5.4.6) $$\det(a\underset{\sim}{T}) = a^3 \det \underset{\sim}{T},$$

(5.4.7) $$\det(\underset{\sim}{u}\otimes\underset{\sim}{v}) = 0.$$

Quanto ao produto de determinantes dos tensores $R,T \in \mathbb{L}$, temos de (5.4.2),

$$\epsilon_{pqr} \det \underset{\sim}{R} = \epsilon_{ijk} R_{ip} R_{jq} R_{kr},$$
$$\epsilon_{pqr} \det \underset{\sim}{T} = \epsilon_{\ell mn} T_{p\ell} T_{qm} T_{rn}.$$

Então,

$$6 \det \underset{\sim}{T} \det \underset{\sim}{R} = \epsilon_{ijk} \epsilon_{\ell mn} R_{ip} R_{jq} R_{kr} T_{p\ell} T_{qm} T_{rn} =$$
$$= \epsilon_{ijk} \epsilon_{\ell mn} (\underset{\sim\sim}{RT})_{i\ell} (\underset{\sim\sim}{RT})_{jm} (\underset{\sim\sim}{RT})_{kn} = 6 \det (\underset{\sim\sim}{RT}),$$

i.e.,

(5.4.8) $$\det \underset{\sim}{R} \det \underset{\sim}{T} = \det(\underset{\sim\sim}{RT}).$$

Essa fórmula pode ser estendida para m tensores, i.e.,

(5.4.9) $$\det \underset{\sim}{T}_1 \det \underset{\sim}{T}_2 \cdots \det \underset{\sim}{T}_m = \det(\underset{\sim}{T}_1\underset{\sim}{T}_2\cdots\underset{\sim}{T}_m).$$

Se em (5.4.9) $\underset{\sim}{T}_1 = \underset{\sim}{T}_2 = \cdots = \underset{\sim}{T}_m$ então,

(5.4.10) $$\det \underset{\sim}{T}^m = \det^m \underset{\sim}{T}.$$

Se $\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{Q}$ é um tensor ortogonal, então

(5.4.11) $$\det(a\underset{\sim}{Q}) = \pm a^3,$$

(5.4.12) $$\epsilon_{ijk} \epsilon_{pqr} Q_{ip} Q_{jq} Q_{kr} = \pm 6,$$

(5.4.13) $$\epsilon_{ijk} Q_{ip} Q_{jq} Q_{kr} = \epsilon_{pqr}.$$

Essa última expressão define os 27 números ϵ_{ijk} como componentes de um tensor cartesiano de terceira ordem.

5.5 - Tensor cofator

De acordo com $(5.4.3)_1$, desenvolvendo $\det \underset{\sim}{T}$ em relação aos cofatores, temos

$$(5.5.1) \qquad \det \underset{\sim}{T} = \frac{1}{6} \epsilon_{pqr} \epsilon_{ijk} T_{ip} T_{jq} T_{kr} = \frac{1}{3} T_{ip} C_{ip},$$

onde C_{ip} simboliza os cofatores dos componentes T_{ip} de T. Resulta então que

$$(5.5.2) \qquad C_{ip} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon_{pqr} T_{jq} T_{kr},$$

ou, multiplicando ambos os membros por δ_{sp} e usando (5.1.7),

$$2 \delta_{sp} C_{ip} = \epsilon_{ijk} \epsilon_{sqr} T_{jq} T_{kr},$$

$$\epsilon_{sqr} \epsilon_{pqr} C_{ip} = \epsilon_{ijk} \epsilon_{sqr} T_{jq} T_{kr},$$

$$(5.5.3) \qquad \epsilon_{pqr} C_{ip} = \epsilon_{ijk} T_{jq} T_{kr}.$$

Se $\underset{\sim}{T}$ é inversível, podemos chegar a uma expressão de $\underset{\sim}{T}^{-1}$ partindo de $(5.5.1)_2$:

$$(5.5.4) \qquad \det \underset{\sim}{T} = \frac{1}{3} \underset{\sim}{T} \cdot \underset{\sim}{C} = \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\underset{\sim\sim}{T} \underset{\sim\sim}{C}^T),$$

onde $\underset{\sim}{C}$ é o tensor cofator de $\underset{\sim}{T}$. Levando em conta que $\operatorname{tr} \underset{\sim}{1} = 3$, obtemos de (5.5.4),

$$\operatorname{tr}(\underset{\sim}{1} \det \underset{\sim}{T}) = \operatorname{tr}(\underset{\sim\sim}{T} \underset{\sim\sim}{C}^T),$$

ou, como os tensores $\underset{\sim}{1} \det \underset{\sim}{T}$ e $\underset{\sim\sim}{T} \underset{\sim\sim}{C}^T$ são escalares,

(5.5.5) $\quad \underset{\sim}{1} \det \underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{T}\underset{\sim}{C}^{T} = T \text{ adj } \underset{\sim}{T},$

definindo o tensor adjunto de $\underset{\sim}{T}$, $\text{adj } \underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{C}^{T}$, cujos componentes são os cofatores dos componentes de $\underset{\sim}{T}^{T}$. Então, de (5.5.5) e (3.6.2), chegamos à expressão

(5.5.6) $\quad \underset{\sim}{T}^{-1} = \underset{\sim}{C}^{T}/\det \underset{\sim}{T} = \text{adj } \underset{\sim}{T}/\det \underset{\sim}{T}.$

Tomando o determinante de (5.5.5) obtemos a fórmula

(5.5.7) $\quad \det \underset{\sim}{C}^{T} = \det \text{adj } \underset{\sim}{T} = \det^{2} \underset{\sim}{T},$

e, com esse resultado e (5.5.6),

(5.5.8) $\quad \det \underset{\sim}{T}^{-1} = \det^{-1} \underset{\sim}{T} = 1/\det \underset{\sim}{T}.$

Então, a função determinante inversa existe quando $\underset{\sim}{T}$ é inversível (automorfismo).

5.6 - Interpretação geométrica de $\det \underset{\sim}{T}$

O volume $v(P) = |v|$ de um paralelepípedo P gerado pelos vetores $\underset{\sim}{u}$, $\underset{\sim}{v}$ e $\underset{\sim}{w}$ é dado por

(5.6.1) $\quad v(P) = |\underset{\sim}{u} \times \underset{\sim}{v} \cdot \underset{\sim}{w}| = |\varepsilon_{ijk}\, u_i\, v_j\, w_k|.$

Um tensor $\underset{\sim}{T}$ transforma linearmente esse paralelepípedo em outro $\underset{\sim}{T}(P)$ cujo volume é dado por

$$v(\underset{\sim}{T}(P)) = |\underset{\sim}{T}u \times \underset{\sim}{T}v \cdot \underset{\sim}{T}w| = |\varepsilon_{ijk}\, T_{ip}\, T_{jq}\, T_{kr}\, u_p\, v_q\, w_r|$$

ou, usando (5.4.2),

$$v(\underset{\sim}{T}(P)) = |\underset{\sim}{T}u \times \underset{\sim}{T}v \cdot \underset{\sim}{T}w| = |\varepsilon_{pqr}\, u_p\, v_q\, w_r \det \underset{\sim}{T}|.$$

Substituindo (5.2.10) nessa última expressão, temos:

$$(5.6.2) \qquad |\det \underset{\sim}{T}| = \frac{v(\underset{\sim}{T}(P))}{v(P)} = |\frac{\underset{\sim}{T}u \times \underset{\sim}{T}v \cdot \underset{\sim}{T}w}{u \times v \cdot w}|,$$

i.e., o módulo do determinante de um tensor $\underset{\sim}{T}$ mede a razão entre o volume de um paralelepípedo linearmente deformado por $\underset{\sim}{T}$ e o volume do paralelepípedo original. Se inicialmente,

$$v(P) = \underset{\sim}{e}_1 \times \underset{\sim}{e} \cdot \underset{\sim}{e}_3 = 1$$

então,

$$(5.6.3) \qquad \det \underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{T}\underset{\sim}{e}_1 \times \underset{\sim}{T}\underset{\sim}{e}_2 \cdot \underset{\sim}{T}\underset{\sim}{e}_3 .$$

Um tensor $\underset{\sim}{T}$ tal que

$$(5.6.4) \qquad |\det \underset{\sim}{T}| = 1$$

é um tensor que preserva volumes, chamado de <u>tensor unimodular</u>. Podemos verificar que os tensores unimodulares formam um grupo chamado de <u>grupo unimodular</u> U do qual o grupo ortogonal O é um subgrupo.

5.7 - <u>Orientação do produto vetorial</u>

Vamos retomar o assunto da orientação do produto vetorial $u \times v$ em relação a orientação do espaço vetorial V que contém u e v, levando em conta a interpretação geométrica do produto misto.

Seja $w = u \times v$ a altura do paralelepípedo P gerado pelos vetores u, v e $u \times v$ que, tem uma certa orientação em relação ao espaço V orientado. O paralelepípedo $\underset{\sim}{T}(P)$ transforma

do linearmente por $\underset{\sim}{T}: V \to V$ tem arestas $\underset{\sim}{T}\underset{\sim}{u}$, $\underset{\sim}{T}\underset{\sim}{v}$ e $\underset{\sim}{T}(\underset{\sim}{u}\times\underset{\sim}{v})$ que podem ter ou não a mesma orientação que as arestas de P. O sinal de

$$(5.7.1) \qquad \det \underset{\sim}{T} = \frac{\underset{\sim}{T}\underset{\sim}{u}\times\underset{\sim}{T}\underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{T}(\underset{\sim}{u}\times\underset{\sim}{v})}{\underset{\sim}{u}\times\underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{u}\times\underset{\sim}{v}},$$

indica se $\underset{\sim}{T}$ alterou ou não a orientação original de P. Pondo $\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{Q}$, temos

$$(\det \underset{\sim}{Q})(\underset{\sim}{u}\times\underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{u}\times\underset{\sim}{v}) = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{u}\times\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{Q}(\underset{\sim}{u}\times\underset{\sim}{v}) = \underset{\sim}{Q}^{T}(\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{u}\times\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{v})\cdot\underset{\sim}{u}\times\underset{\sim}{v},$$

ou, como $\underset{\sim}{u}\times\underset{\sim}{v} \neq \underset{\sim}{0}$,

$$(5.7.2) \qquad \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{u}\times\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{v} = (\det \underset{\sim}{Q})\underset{\sim}{Q}(\underset{\sim}{u}\times\underset{\sim}{v}),$$

i.e.,

$$(5.7.3) \qquad \underset{\sim}{u}^{*} \times \underset{\sim}{v}^{*} = (\det \underset{\sim}{Q})(\underset{\sim}{u}\times\underset{\sim}{v})^{*},$$

onde $\underset{\sim}{u}^{*}$, $\underset{\sim}{v}^{*}$ e $(\underset{\sim}{u}\times\underset{\sim}{v})^{*}$ são os vetores rodados (ou melhor, ortogonalmente transformados) por $Q \in \mathbb{O}$. Havendo uma reflexão, $\det \underset{\sim}{Q} = -1$, e os vetores $\underset{\sim}{u}$, $\underset{\sim}{v}$ e $\underset{\sim}{u}\times\underset{\sim}{v}$ e $\underset{\sim}{u}^{*}$, $\underset{\sim}{v}^{*}$ e $(\underset{\sim}{u}\times\underset{\sim}{v})^{*}$ tem orientações diferentes em V. Substituindo $\underset{\sim}{u}$ por $\underset{\sim}{e}_i$, $\underset{\sim}{v}$ por $\underset{\sim}{e}_j$ e $\underset{\sim}{u}\times\underset{\sim}{v}$ por $\underset{\sim}{e}_i\times\underset{\sim}{e}_j$, temos, usando (5.1.3),

$$(5.7.4) \qquad \underset{\sim}{e}_i^{*} \times \underset{\sim}{e}_j^{*} = (\det \underset{\sim}{Q})\, \epsilon_{ijk}\, \underset{\sim}{e}_k^{*} = \pm\epsilon_{ijk}\, \underset{\sim}{e}_k^{*},$$

mostrando que $\underset{\sim}{Q}$ impróprio troca a orientação da base $\mathbb{B}$ de V.

CAPÍTULO 6

AUTOVALORES E AUTOVERSORES

6.1 - Polinômio anulador de um tensor.

Chamamos de polinômio anulador de um tensor $\underset{\sim}{T}$ ao polinômio escalar

$$f(x) = k_o + k_1 x + \ldots + k_m x^m \tag{6.1.1}$$

cujo valor em $\underset{\sim}{T}$ é o tensor 0, i.e., é o polinômio $f(x)$ que tem a propriedade

$$\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T}) = k_o \underset{\sim}{1} + k_1 \underset{\sim}{T} + k_2 \underset{\sim}{T}^2 + \ldots + k_m \underset{\sim}{T}^m = \underset{\sim}{0}. \tag{6.1.2}$$

Por exemplo, o espaço $\mathbb{L}$ dos tensores é de nove dimensões e quaisquer dez tensores são linearmente dependentes.

Isso significa que um conjunto $\{\underset{\sim}{1}, \underset{\sim}{T}, \underset{\sim}{T}^2, \ldots, \underset{\sim}{T}^9\}$ de potências de $\underset{\sim}{T}$ é um conjunto linearmente dependente de vetores de $\mathbb{L}$ e que então, existem números $k_o, k_1, \ldots, k_9$, nem todos nulos, tais que a equação (6.1.2) é verdadeira.

6.2 - Polinômio característico de um tensor.

A função escalar definida por $\Delta(T) = \det(\underset{\sim}{T} - T\underset{\sim}{1})$, onde T é um parâmetro escalar é chamada de determinante característico do tensor $\underset{\sim}{T}$. Em relação a uma base $\mathbb{B}$,

$$(6.2.1)\qquad [\underset{\sim}{T}-T\underset{\sim}{1}] = [\underset{\sim}{T}] - T[\underset{\sim}{1}] = \begin{vmatrix} T_{11}-T & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22}-T & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33}-T \end{vmatrix}$$

é chamada de matriz característica de $\underset{\sim}{T}$.

Referida a uma base rodada $\mathbb{B}^*$ a matriz característica e $[\underset{\sim}{T}]' - [T\underset{\sim}{1}]$ mas o determinante característico não se altera, pois,

$$(6.2.2)\qquad \det([\underset{\sim}{T}]' - [T\underset{\sim}{1}]) = \det([\underset{\sim}{Q}^T][\underset{\sim}{T}][\underset{\sim}{Q}] - [T\underset{\sim}{1}]) =$$
$$= \det(\underset{\sim}{Q}^T([\underset{\sim}{T}]-[T\underset{\sim}{1}])\underset{\sim}{Q}) = \det([\underset{\sim}{Q}^T][\underset{\sim}{Q}])\det([T-T\underset{\sim}{1}]) =$$
$$= \det([\underset{\sim}{T}] - [T\underset{\sim}{1}]).$$

O desdobramento do determinante característico em termos do parâmetro T é o polinômio do terceiro grau

$$(6.2.3)\qquad \Delta(T) = T^3 + I_1 T^2 - I_2 T + I_3$$

chamado de polinômio característico de $\underset{\sim}{T}$, onde os coeficientes I_1, I_2 e I_3 são funções escalares dos componentes de $\underset{\sim}{T}$. De acordo com (6.2.2) os polinômios característicos de $[\underset{\sim}{T}]$ e $[\underset{\sim}{T}]'$ são iguais o que significa que esses coeficientes, chamados de invariantes principais de $\underset{\sim}{T}$, não se alteram sob transformação de base.

Os invariantes I_1, I_2 e I_3 são iguais, respectivamente, aos menores de primeira, segunda e terceira ordens de $\det \underset{\sim}{T}$, i.e.,

$$
(6.2.4)\quad \begin{cases}
I_1 = T_{11} + T_{22} + T_{33} = \operatorname{tr} \underset{\sim}{T} = T_{ii}, \\
I_2 = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{13} \\ T_{31} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{tr}^2 \underset{\sim}{T} - \operatorname{tr} \underset{\sim}{T}^2\right) \\
= \det \underset{\sim}{T} \operatorname{tr} \underset{\sim}{T}^{-1} = \operatorname{tr} \operatorname{adj} \underset{\sim}{T} = \frac{1}{2}\left(T_{ii}\, T_{jj} - T_{ij}\, T_{ji}\right), \\
I_3 = \det \underset{\sim}{T} = \frac{1}{6}\left(\operatorname{tr}^3 \underset{\sim}{T} - 3 \operatorname{tr} \underset{\sim}{T}^2 \operatorname{tr} \underset{\sim}{T} + 2 \operatorname{tr} \underset{\sim}{T}^3\right) = \\
\quad = \frac{1}{6}\, \varepsilon_{pqr}\, \varepsilon_{ipk}\, T_{ij}\, T_{rq}\, T_{kr} = \\
= \left(T_{ij}\, T_{jj}\, T_{kk} - 3\, T_{ij}\, T_{ji}\, T_{kk} + 2\, T_{ij}\, T_{jk}\, T_{ki}\right).
\end{cases}
$$

A chamada <u>equação característica</u> de $\underset{\sim}{T}$

$$
(6.2.5)\quad \Delta(T) = -T^3 + I_1 T^2 - I_2 T + I_3 = (T_1 - T)(T_2 - T)(T_3 - T) = 0
$$

tem três raizes T_1, T_2 e T_3, chamadas de <u>raizes caracterís-ticas</u> de $\underset{\sim}{T}$, sendo duas complexas conjugadas e uma real ou as três raeais. A relação entre essas raizes e os coeficientes são os chamados <u>polinômios simétricos elementares</u>

$$
(6.2.6)\quad \begin{cases}
I_1 = T_1 + T_2 + T_3 = \operatorname{tr} \underset{\sim}{T}, \\
I_2 = T_1\, T_2 + T_1\, T_3 + T_2\, T_3, \\
I_3 = T_1\, T_2\, T_3.
\end{cases}
$$

O polinômio (6.2.6), define $\operatorname{tr} \underset{\sim}{T}$ como a soma das raizes da equação característica de $\underset{\sim}{T}$.

A determinação das raizes é particularmente simples se a matriz característica do tensor é triangular, i.e., se

$$
(6.2.7)\qquad [\underset{\sim}{T} - T\underset{\sim}{1}] = \begin{bmatrix} T_{11}-T & T_{12} & T_{13} \\ 0 & T_{22}-T & T_{23} \\ 0 & 0 & T_{33}-T \end{bmatrix}.
$$

Nesse caso,

$$(6.2.8) \qquad \Delta T = (T_{11}-T)(T_{22}-T)(T_{33}-T) = 0$$

e $T_1 = T_{11}$, $T_2 = T_{22}$ e $T_3 = T_{33}$.

Além dos invariantes principais, existem outras funções dos componentes de $\underset{\sim}{T}$ que são invariantes sob transformações de base. Por exemplo, são invariantes os momentos definidos por

$$(6.2.9) \qquad \bar{I}_p(\underset{\sim}{T}) = \operatorname{tr} \underset{\sim}{T}^p, \quad p = 1,2,3.$$

Com as expressões (6.2.4) podemos relacionar os invariantes principais e os momentos do seguinte modo:

$$(6.2.10) \qquad \begin{cases} I_1 + \bar{I}_1, \\ I_2 = \frac{1}{2}(\bar{I}_1^2 - \bar{I}_2), \\ I_3 = \frac{1}{6}\bar{I}_1^3 - \frac{1}{2}\bar{I}_1\bar{I}_2 + \frac{1}{3}\bar{I}_3; \end{cases}$$

$$(6.2.11) \qquad \begin{cases} \bar{I}_1 = I_1 = \operatorname{tr} \underset{\sim}{T}, \\ \bar{I}_2 = I_1^2 - 2\,I_2 = \operatorname{tr} \underset{\sim}{T}^2, \\ \bar{I}_3 = 3\,I_3 - I_1^3 - 3\,I_1I_2 = \operatorname{tr} \underset{\sim}{T}^3. \end{cases}$$

Segundo o teorema de Hamilton-Cayley, o polinômio característico de um tensor $\underset{\sim}{T}$ é também um polinômio anulador desse tensor, portanto,

$$(6.2.12) \qquad \Delta(\underset{\sim}{T}) = \underset{\sim}{T}^3 + I_1\underset{\sim}{T}^2 - I_2\underset{\sim}{T} + I_3\underset{\sim}{1} = (T_1\,\underset{\sim}{1} - \underset{\sim}{T})(T_2\,\underset{\sim}{1} - \underset{\sim}{T})(T_3\,\underset{\sim}{1} - \underset{\sim}{T}) = \underset{\sim}{0}.$$

Se duas raizes são iguais, por exemplo se $T_1 = T_2$, então o tensor $\underset{\sim}{T}$ satisfaz também o polinômio anulador do segundo grau

(6.2.13) $\underset{\sim}{\Delta}(\underset{\sim}{T}) = \underset{\sim}{T}^2 - (T_1-T_3)\underset{\sim}{T} + T_1\,T_3\,\underset{\sim}{1} = 0.$

Se $T_1 = T_2 = T_3 = T$, o tensor $\underset{\sim}{T}$ é um zero de (6.2.12) e de

(6.2.14) $$\underset{\sim}{\Delta}(\underset{\sim}{T}) = \underset{\sim}{T} - T\underset{\sim}{1} = \underset{\sim}{0}.$$

Chamamos de polinômio mínimo de um tensor $\underset{\sim}{T}$ ao polinômio anulador unitário de menor grau desse tensor. É claro que se as raizes da equação caracteristica de $\underset{\sim}{T}$ são distintas, o polinômio caracteristico é, a menos do sinal de T^3, o polinômio mínimo.

Todo polinômio anulador de $\underset{\sim}{T}$, inclusive o polinômio característico, é divisível sem resto pelo polinômio mínimo. A propriedade expressa por (4.14.4) permite concluir que tensores semelhantes tem o mesmo polinômio característico e que consequentemente tem também o mesmo polinômio mínimo. A igualdade de seus polinômios característicos ou de seus polinômios mínimos é condição necessária para a semelhança de dois tensores. Entretanto, essas condições não são suficientes, i.e., podemos ter tensores com os mesmos polinômios característicos ou os mesmos polinômios mínimos que não são semelhantes.

6.3 - Subespaços invariantes.

Um subespaço $\bar{V} \subset V$ é chamado de invariante em relação a um tensor $\underset{\sim}{T}: V \to V$ se $\underset{\sim}{v} \in \bar{V}$ implica em $\underset{\sim}{T}\underset{\sim}{v} \in \bar{V}$. São subespaços invariantes em relação a qualquer tensor os subespaços triviais concretizados em E pela origem $\underset{\sim}{0}$ e por todo E.

Um exemplo de subespaço invariante do tensor projeção ortogonal $\underset{\sim}{P}$, definido por (3.12.1), é o plano $(\underset{\sim}{e}_1,\underset{\sim}{e}_2)_{\underset{\sim}{0}}$ ilustrado na Fig. 6.2.1.

É fácil verificar que se $\underset{\sim}{T}$ é um tensor inversível, então qualquer subespaço invariante em relação a $\underset{\sim}{T}$ também é invariante em relação a $\underset{\sim}{T}^{-1}$.

6.4 - Autovalores e autoversores de um tensor.

Os subespaços unidimensionais de um tensor $\underset{\sim}{T}$ são chamados de direções invariantes desse tensor. Todo versor $\underset{\sim}{m} \neq 0$ de $\mathbb{V}$, que se apoia em uma direção invariante de um tensor $T: \mathbb{V} \to \mathbb{V}$, é chamado de autoversor ou de direção principal do tensor $\underset{\sim}{T}$. Em outras palavras, dizemos que $\underset{\sim}{m} \neq \underset{\sim}{0}$ é um autoversor de um tensor $\underset{\sim}{T}$ se esse tensor transforma-o em um versor colinear

$$\underset{\sim}{T}\underset{\sim}{m} = T\underset{\sim}{m}, \tag{6.4.1}$$

onde o número $T \in \mathbb{R}$ é chamado de autovalor de $\underset{\sim}{T}$ correspondente ao autoversor $\underset{\sim}{m}$. Os adjetivos característico, próprio, principal e secular são usados também para o versor $\underset{\sim}{m}$ e o valor T em (6.4.1).

Os seguintes teoremas e proposições podem ser demonstrados:

1. Os autoversores de um tensor $\underset{\sim}{T}$ que correspondem a um dado autovalor T geram um subespaço de $\mathbb{V}$ chamado de autoespaço de $\underset{\sim}{T}$ correspondente ao autovalor T.

2. Os autoversores de $\underset{\sim}{T}$ correspondentes a distintos autovalores são linearmente independentes. Como corolário podemos concluir que um tensor $\underset{\sim}{T}$ tem no máximo três autoversores com diferentes autovalores.

3. Se $\underset{\sim}{T}$ é singular, i.e., se $\det \underset{\sim}{T} = 0$ então, $T = 0$ e a recíproca também é verdadeira.

4. Estendendo (6.4.1) às potênoias de $\underset{\sim}{T}$ temos

$$\underset{\sim}{T}^2\underset{\sim}{m} = \underset{\sim}{T}(\underset{\sim}{T}\underset{\sim}{m}) = \underset{\sim}{T}(T\underset{\sim}{m}) = T(\underset{\sim}{T}\underset{\sim}{m}) = T(T\underset{\sim}{m}) = T^2\underset{\sim}{m}.$$

Por indução chegamos à expressão

$$\underset{\sim}{T}^k\underset{\sim}{m} = T^k\underset{\sim}{m} \tag{6.4.2}$$

e concluímos que a potência k de qualquer autovalor de $\underset{\sim}{T}$ é um autovalor de $\underset{\sim}{T}^k$ e todo autoversor de $\underset{\sim}{T}$ é autoversor de $\underset{\sim}{T}^k$, embora possa ocorrer que para algum k existam autoversores de $\underset{\sim}{T}^k$ que não são autoversores de $\underset{\sim}{T}$. Esses resultados são válidos para $k < 0$ se $\underset{\sim}{T}$ é inversível, i.e., em partioular,

$$\underset{\sim}{T}^{-1}\underset{\sim}{m} = T^{-1}\underset{\sim}{m}. \tag{6.4.3}$$

5. Podemos estender (6.4.2) aos polinômios $H = F(\underset{\sim}{T})$ e escrever

$$\underset{\sim}{H}\underset{\sim}{m} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T})\underset{\sim}{m} = f(T)\underset{\sim}{m}, \tag{6.4.4}$$

onde o polinômio escalar $f(T)$ é o autovalor do polinômio tensorial $\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T})$ correspondente ao autoversor $\underset{\sim}{m}$. Vemos que todo autoversor de $\underset{\sim}{T}$ correspondente ao autovalor T é também um autoversor de $\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T})$ oorrespondente ao autovalor $f(T)$. Portanto, se $\underset{\sim}{T}$ satisfaz a $\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T}) = \underset{\sim}{0}$ então, $f(T) = 0$ para todo autovalor

T de $\underset{\sim}{T}$.

6. Os autovalores de $\underset{\sim}{T}$ são as raizes reais do polinômio característico (6.2.3) do tensor $\underset{\sim}{T}$. Esse polinômio tem coeficientes reais e é do terceiro grau, portanto, tem pelo menos uma raiz real e $\underset{\sim}{T}$ tem pelo menos um autovalor.

7. Se $\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{W}$ é um tensor antissimétrico então, de suas três raizes características, duas são complexas conjugadas e a raiz real é nula. Para mostrar que o autovalor W de $\underset{\sim}{W}$ é nulo, admitamos que um versor $\underset{\sim}{m} = \underset{\sim}{0}$ satisfaz Wm = Wm. Então, como $\underset{\sim}{W}^T = -\underset{\sim}{W}$,

(6.4.5) $$\underset{\sim}{m}\cdot\underset{\sim}{Wm} = -\underset{\sim}{m}\cdot\underset{\sim}{Wm} = \underset{\sim}{Wm}\cdot\underset{\sim}{m} = W = 0,$$

porque o único número igual ao seu negativo é o número zero.

8. Se os tensores $\underset{\sim}{T}$ e $\underset{\sim}{R}$ comutam, i.e., se

(6.4.6) $$\underset{\sim\sim}{TR} = \underset{\sim\sim}{RT}$$

então, todo auto-espaço de $\underset{\sim}{T}$ é um subespaço invariante de $\underset{\sim}{R}$.

9. Admitindo que o tensor $\underset{\sim}{T}$ tem um conjunto de auto-espaços cuja soma é todo o espaço V e cada um dos quais é invariante em relação a um tensor $\underset{\sim}{R}$, temos $\underset{\sim\sim}{TR} = \underset{\sim\sim}{RT}$.

10. Se $\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{S}$ é simétrico e $\underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{Q}$ é ortogonal temos como conseqüência das duas últimas proposições o chamado <u>teorema da comutação</u>: Um tensor simétrico $\underset{\sim}{S}$ comuta com um tensor ortogonal $\underset{\sim}{Q}$, i.e.,

(6.4.7) $$\underset{\sim\sim}{SQ} = \underset{\sim\sim}{QS},$$

se e somente se cada auto-espaço de $\underset{\sim}{S}$ é invariante em relação

a $\underset{\sim}{Q}$.

6.5 - Autoversores de tensores semelhantes.

Já mostramos que tensores semelhantes $\underset{\sim}{T}$ e $\underset{\sim}{T}^* = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{T}\underset{\sim}{Q}^T$ tem os mesmos polinômios característicos e portanto, os mesmos autovalores.

Substituindo $\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{Q}^T \underset{\sim}{T}^* \underset{\sim}{Q}$ em (6.4.1) temos

$$\underset{\sim}{Q}^T \underset{\sim}{T}^* \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{m} = T\underset{\sim}{m},$$

i.e., analogamente a (4.12.5),

$$\underset{\sim}{T}^*\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{m} = T\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{m},$$

ou,

(6.5.1) $$\underset{\sim}{T}^*\underset{\sim}{m}^* = T\underset{\sim}{m}^*.$$

Então, se T é autovalor de $\underset{\sim}{T}$ correspondente ao autoversor $\underset{\sim}{m}$, T também é autovalor de $\underset{\sim}{T}^*$ correspondente ao autoversor rodado

(6.5.2) $$\underset{\sim}{m}^* = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{m}.$$

6.6 - Formas canônicas de um tensor.

De (6.4.1) temos

(6.6.1) $$(\underset{\sim}{T} - T\underset{\sim}{1})\underset{\sim}{m} = \underset{\sim}{0},$$

ou, em componentes,

(6.6.2) $$(T_{ij} - T\,\delta_{ij})m_j = 0,$$

que representa um sistema homogêneo de três equações a três incognitas. Para que esse sistema tenha uma solução não-trivial $\{\underset{\sim}{m}_1, \underset{\sim}{m}_2, \underset{\sim}{m}_3\}$ correspondente a um valor de T é necessário e suficiente que tenhamos

$$(6.6.3) \qquad \Delta(T) = \det(\underset{\sim}{T} - T\underset{\sim}{1}) = \det(T_{ij} - T\,\delta_{ij}) = 0,$$

i.e., que o determinante característico de $\underset{\sim}{T}$ seja nulo. A condição (6.6.3) é a equação característica de $\underset{\sim}{T}$ que sabemos ter três raizes reais ou uma real e duas complexas conjugadas.

1. Três raizes reais distintas. Nesse caso, a cada uma das distintas raizes corresponde de (6.6.2) um autoversor diferente, i.e.,

$$(6.6.4) \qquad \underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{m}_i = T_i\,\underset{\sim}{m}_i \quad \text{(não soma)},$$

ou,

$$(6.6.5) \qquad \begin{cases} \underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{m}_1 = T_1\,\underset{\sim}{m}_1; \\ \underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{m}_2 = T_2\,\underset{\sim}{m}_2; \\ \underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{m}_3 = T_3\,\underset{\sim}{m}_3. \end{cases}$$

Esses autoversores $\underset{\sim}{m}_1$, $\underset{\sim}{m}_2$ e $\underset{\sim}{m}_3$ são linearmente independentes e formam uma base de V, chamada de base canônica do tensor $T: V \to V$. Essa base é ortogonal se e somente se $\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{S}$ é simétrico.

Comparando os sistemas (6.6.5) e (3.2.1), vemos que em relação a base canônica a matriz do tensor $\underset{\sim}{T}$ é dada por

$$(6.6.6) \qquad [\underset{\sim}{T}]_{\underset{\sim}{m}} = \begin{bmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 \\ 0 & 0 & T_3 \end{bmatrix}$$

cujos elementos podem ser expressos por

(6.6.7) $$[T_{ij}]_m = [T_i\ \delta_{ij}] \quad \text{(não soma)}.$$

Podemos considerar que em relação a uma base arbitrária $\{f_i\}$, os autoversores da base canônica de $\underset{\sim}{T}$ são dados por

(6.6.8) $$\underset{\sim}{m}_i = \underset{\sim}{A}\ \underset{\sim}{f}_i,$$

onde $\underset{\sim}{A}$ é um tensor inversível de transformação de bases que só será ortogonal se $\underset{\sim}{T}$ for simétrico. Conhecida a matriz $[\underset{\sim}{A}]$, a relação entre a matriz diagonal $[\underset{\sim}{T}]_{\underset{\sim}{m}}$ e a matriz $[\underset{\sim}{T}]_{\underset{\sim}{f}}$ é dada pela equação equivalente a (4.8.3),

(6.6.9) $$[\underset{\sim}{T}]_{\underset{\sim}{m}} = [\underset{\sim}{A}^{-1}][\underset{\sim}{T}]_{\underset{\sim}{f}}[\underset{\sim}{A}].$$

Dizemos que $T: \underset{\sim}{V} \to V$ é um <u>tensor diagonal</u> se existe em V uma base cujos versores são os autoversores de $\underset{\sim}{T}$. Todo tensor definido sobre um espaço tridimensional, cuja equação característica tem três raizes reais diferentes, é diagonal; a matriz de $\underset{\sim}{T}$ em relação à base de seus autoversores é diagonal, e os elementos da diagonal são os autovalores de $\underset{\sim}{T}$.

2. <u>Raizes reais múltiplas</u>. A equação característica de $\underset{\sim}{T}$ pode ter duas ou três raizes reais iguais. O número de autoversores linearmente independentes correspondente a uma raiz múltipla de $\Delta(T) = 0$, igual a dimensão do auto-espaço associado a essa raiz, é, no máximo, igual a multiplicidade m dessa raiz, i.e., no máximo igual a dois ou três.

Se $n = m$, o que sempre ocorre se $\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{S}$ é simétrico então, existe uma base de autoversores de $\underset{\sim}{T}$ e esse tensor é diagonal com dois ou três autovalores iguais.

Se $n < m$, não existe uma base de autoversores e o tensor $\underset{\sim}{T}$ não é diagonal. Nesse caso, se $m = 2$, em relação à uma certa base $\{\underset{\sim}{f}\}$, o tensor $\underset{\sim}{T}$ pode ser representado pela matriz canônica

$$[\underset{\sim}{T}]_{\underset{\sim}{f}} = \begin{bmatrix} T & 1 & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & T_3 \end{bmatrix}. \tag{6.6.10}$$

Se $m = 3$, as formas canônicas que representam o tensor $\underset{\sim}{T}$ podem ser

$$[\underset{\sim}{T}]_{\underset{\sim}{f}} = \begin{bmatrix} T & 1 & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & T \end{bmatrix}, \tag{6.6.11}$$

ou,

$$[\underset{\sim}{T}]_{\underset{\sim}{f}} = \begin{bmatrix} T & 1 & 0 \\ 0 & T & 1 \\ 0 & 0 & T \end{bmatrix}. \tag{6.6.12}$$

3. Uma raiz real. Nesse caso as raizes características são distintas porque as outras duas são complexas conjugadas. Sendo V um espaço vetorial definido sobre o corpo dos números reais, nesse caso o tensor $\underset{\sim}{T}$ tem somente um autovalor.

Usando números complexos para as transformações e para os componentes de vetores e tensores, podemos representar um tensor na forma diagonal (6.6.6) onde, por exemplo,

$$\begin{cases} T_1 = a + bi, \\ T_2 = a - bi. \end{cases} \tag{6.6.13}$$

Nesse caso o tensor assimétrico $\underset{\sim}{T}$ pode ser transformado por uma transformação real na forma canônica real

$$(6.6.14) \qquad [\underset{\sim}{T}]_{\underset{\sim}{m}} = \begin{bmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & T_3 \end{bmatrix},$$

onde T_3 é o autovalor de $\underset{\sim}{T}$.

6.7 - Autovalores e autoversores de um tensor ortogonal.

Se $\underset{\sim}{Q} \in \mathcal{O}$, de acordo com (4.1.5) e (6.4.1),

$$(6.7.1) \qquad \|\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{m}\| = \|\underset{\sim}{m}\| = 1 = |Q|\|\underset{\sim}{m}\|,$$

i.e.,

$$(6.7.2) \qquad |Q| = 1.$$

Então, as raizes características reais de $\underset{\sim}{Q}$ são

$$(6.7.3) \qquad Q = \pm 1,$$

e se $\underset{\sim}{Q}$ tem duas raizes complexas conjugadas o seu produto é igual a $+1$. Além disso, de (4.1.3) e (6.2.6) sabemos que

$$(6.7.4) \qquad \det \underset{\sim}{Q} = Q_1 Q_2 Q_3 = \pm 1,$$

portanto, temos duas classes a considerar, a dos tensores ortogonais próprios ($\det Q = +1$) e a dos impróprios ($\det \underset{\sim}{Q} = -1$).

1. Tensores ortogonais próprios. Se $\det \underset{\sim}{Q} = +1$, i.e., se $\underset{\sim}{Q} \in \mathcal{O}^+$, um dos autovalores de $\underset{\sim}{Q}$ é $+1$ e os outros dois podem ser ambos $+1$ ou -1. Um exemplo é o tensor $\underset{\sim}{Q}$ cuja ma-

triz é dada por (4.3.1) e cuja equação característica

$$(6.7.5) \qquad \Delta(Q) = \begin{vmatrix} \cos\theta - Q & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta - Q & 0 \\ 0 & 0 & 1-Q \end{vmatrix} =$$

$$= (1-Q)(Q^2 - 2\cos\theta + 1) = 0,$$

tem como raizes características

$$(6.7.6) \qquad \begin{cases} Q_1 = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta = e^{i\theta}, \\ Q_2 = \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta = e^{-i\theta}, \\ Q_3 = 1. \end{cases}$$

Se $\theta = 0$, então $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 1$, i.e., $\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{1}$ e qualquer direção $\underset{\sim}{m}$ é um auto-espaço unidimensional de $\underset{\sim}{Q}$. Se $\theta \neq 0$, o único auto-espaço invariante de $\underset{\sim}{Q}$ é o eixo gerado pelo autoversor $\underset{\sim}{m}$ $(= \underset{\sim}{m}_3)$ correspondente ao autovalor $Q = +1$ e chamado de <u>eixo da rotação</u> $\underset{\sim}{Q}$. Nesse caso, tanto $+\underset{\sim}{m}$ como $-\underset{\sim}{m}$ permanecem invariantes e $\underset{\sim}{Q}$ descreve uma rotação de ângulo θ em torno do eixo de rotação.

2. <u>Tensores ortogonais impróprios</u>. Se $\det \underset{\sim}{Q} = -1$, então um dos autovalores é -1 e os outros dois são ambos $+1$ ou -1. Um exemplo é o tensor $\underset{\sim}{Q}$ cuja matriz

$$(6.7.7) \qquad [\underset{\sim}{Q}] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

é a composição de (4.3.1) e (4.3.2). As raizes características Q_1 e Q_2 são dadas por $(6.7.6)_{1,2}$ e Q_3 é o autovalor -1.

Se $\theta = \pi$, então $\underset{\sim}{Q} = -\underset{\sim}{1}$, chamado de tensor inversão, reflete qualquer direção $\underset{\sim}{m}$ em relação a origem $\underset{\sim}{O}$. Nos casos em que $\theta \neq \pi$, existe somente uma direção invariante $\underset{\sim}{m}$ $(= \underset{\sim}{m}_3)$ tal que $\underset{\sim}{m}$ e $-\underset{\sim}{m}$ são refletidas. Nesses casos $\underset{\sim}{Q}$ descreve a composição de uma reflexão com uma rotação em torno do eixo gerado por $\underset{\sim}{m}$.

6.8 - Invariantes de um tensor ortogonal.

Quanto aos invariantes principais de tensores ortogonais representados pelas matrizes (4.3.1) e (6.7.7), temos, de acordo com (6.2.6),

$$(6.8.1) \qquad \begin{cases} I_1 = \pm I_2 = 2 \cos\theta \pm 1, \\ I_3 = \pm 1, \end{cases}$$

onde o sinal é positivo se $\underset{\sim}{Q}$ é próprio e negativo se $\underset{\sim}{Q}$ é impróprio. Então, esses tensores tem somente um invariante ortogonal escalar independente que é o ângulo θ da rotação efetuada por $\underset{\sim}{Q}$ em torno do eixo gerado por $\underset{\sim}{m}_3$. De acordo com $(6.8.1)_1$, esse ângulo é a solução apropriada da equação

$$(6.8.2) \qquad \cos\theta = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}\,\underset{\sim}{Q} \pm 1).$$

6.9 - Parcela antissimétrica de tensor ortogonal próprio.

Vimos que se $\det \underset{\sim}{Q} = +1$, i.e., se $\underset{\sim}{Q} \in \mathcal{O}^+$, o único autoespaço de $\underset{\sim}{Q} \neq 1$ é o eixo da rotação $\underset{\sim}{Q}$, gerado pelo autoversor

$\underset{\sim}{m}$ associado ao autovalor +1. Os vetores que se apoiam nesse eixo permanecem invariantes sob transformação $\underset{\sim}{Q} \in \mathcal{O}^+$.

A parcela antissimétrica de $\underset{\sim}{Q}$ é definida por

$$\underset{\sim}{W}^{Q} = \frac{1}{2}\,(\underset{\sim}{Q} - \underset{\sim}{Q}^{T}). \tag{6.9.1}$$

Se $\mathcal{V}$ é um espaço vetorial orientado, então, de acordo com (5.3.1) temos, para qualquer $\underset{\sim}{v} \in \mathcal{V}$,

$$\underset{\sim}{w}^{Q} \times \underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{W}^{Q}\,\underset{\sim}{v} = \frac{1}{2}\,(\underset{\sim}{Q} - \underset{\sim}{Q}^{T})\underset{\sim}{v}, \tag{6.9.2}$$

onde $\underset{\sim}{w}^{Q} = \text{vet}\,\underset{\sim}{W}^{Q}$ é determinado univocamente por $\underset{\sim}{Q}$ mas, nesse caso, a recíproca não é verdadeira.

Vamos demonstrar que $\underset{\sim}{w}^{Q}$ se apoia no eixo da rotação $\underset{\sim}{Q}$. Se $\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{m}$ é o autoversor de $\underset{\sim}{Q}$ associado ao autovalor $Q = +1$, temos:

$$\frac{1}{2}\,(\underset{\sim}{Q}-\underset{\sim}{Q}^{T})\underset{\sim}{m} = \frac{1}{2}\,(Q\underset{\sim}{m} - Q^{-1}\underset{\sim}{m}) = \frac{1}{2}\,(\underset{\sim}{m}-\underset{\sim}{m}) = \underset{\sim}{0}.$$

Consequentemente,

$$\underset{\sim}{W}^{Q}\underset{\sim}{m} = \underset{\sim}{w}^{Q}\times\underset{\sim}{m} = W^{Q}\underset{\sim}{m} = \underset{\sim}{0}, \tag{6.9.3}$$

e, para $\underset{\sim}{w}^{Q} \neq \underset{\sim}{0}$ e $w^{Q} \in \mathbb{R}$, resulta

$$\underset{\sim}{w}^{Q} = w^{Q}\underset{\sim}{m}, \tag{6.9.4}$$

i.e., $\underset{\sim}{w}^{Q}$ de fato se apoia no eixo gerado por $\underset{\sim}{m}$. Em $(6.9.3)_3$ mostramos também que o autovalor W^{Q} de $\underset{\sim}{W}^{Q}$ correspondente ao autoversor $\underset{\sim}{m}$ desse tensor, é nulo.

Se $\underset{\sim}{m}$ coincide com o versor base $\underset{\sim}{e}_3$, então em (5.3.4) $w_1^{Q} = w_2^{Q} = 0$, $w_3^{Q} = w^{Q} = \|\underset{\sim}{w}^{Q}\|$ e (6.9.1) onde $\underset{\sim}{Q}$ é representado pela matriz (4.3.1) é expresso matricialmente por

$$(6.9.5) \qquad [\underset{\sim}{W}^{Q}] = \begin{bmatrix} 0 & -w^{Q} & 0 \\ w^{Q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

i.e.,

$$(6.9.6) \qquad \|\underset{\sim}{W}^{Q}\| = w^{Q} = |\operatorname{sen}\theta|.$$

6.10 - Autovalores e autoversores de tensor simétrico.

No caso de um tensor simétrico, $\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{S}$, não só as três raizes características são números reais como também, a elas, distintas ou iguais, correspondem três autoversores mutuamente ortogonais. O conjunto $\{\underset{\sim}{n}_1, \underset{\sim}{n}_2, \underset{\sim}{n}_3\}$, base canônica ortogonal de V, pode ser então considerado como uma base rodada $\mathbb{N} = \{\underset{\sim}{n}_i = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{e}_i\}$, i.e., de acordo com (4.2.1),

$$(6.10.1) \qquad \underset{\sim}{n}_i = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{e}_i = Q_{ki}\ \underset{\sim}{e}_k,$$

onde, analogamente a (4.2.5),

$$(6.10.2) \qquad Q_{ij} = \underset{\sim}{e}_i \cdot \underset{\sim}{n}_j = \cos(\underset{\sim}{e}_i, \underset{\sim}{n}_j).$$

Pondo $\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{S}$ e $\underset{\sim}{m} = \underset{\sim}{n}$, o sistema (6.6.5) é expresso por

$$(6.10.3) \qquad \underset{\sim}{S}\ \underset{\sim}{n}_i = S_i\ \underset{\sim}{n}_i, \quad \text{(não soma)}.$$

Então, os componentes S'_{ij} de $\underset{\sim}{S}$ em relação a base $\mathbb{N}$ são, de acordo com (4.7.2), dados por

$$(6.10.4) \qquad S'_{ij} = \underset{\sim}{S}\cdot\underset{\sim}{n}_i \otimes n_j = \underset{\sim}{n}_i \cdot \underset{\sim}{S}\ \underset{\sim}{n}_j = Q_{ki}\ S_{km}\ Q_{mj} =$$

$$= S_i\ \underset{\sim}{n}_i \cdot \underset{\sim}{n}_j = S_i\ \delta_{ij}, \text{ (não soma em } i),$$

mostrando que

$$(6.10.5) \qquad [S'_{ij}] = [\underset{\sim}{S}]' = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 \end{bmatrix},$$

onde os autovalores S_i, $i=1,2,3$, podem ser iguais (dois ou três) ou todos diferentes. Em $(6.10.4)_3$ vemos também que a matriz ortogonal $[\underset{\sim}{Q}]$, cujos elementos são dados por (6.10.2), diagonaliza a matriz do tensor simétrico $\underset{\sim}{S}$ de acordo com

$$(6.10.6) \qquad [\underset{\sim}{S}]' = [\underset{\sim}{Q}^T][\underset{\sim}{S}][\underset{\sim}{Q}] = [\underset{\sim}{Q}][\underset{\sim}{S}][\underset{\sim}{Q}^T].$$

Em relação a uma base canônica ortogonal $\mathbb{N}^* = \{\underset{\sim}{n}^*_i\}$ de autoversores rodados

$$(6.10.7) \qquad \underset{\sim}{n}^*_i = \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{n}_i,$$

os componentes do tensor simétrico rodado

$$(6.10.8) \qquad \underset{\sim}{S}^* = \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{S}\,\underset{\sim}{Q}^T$$

são dados por

$$\underset{\sim}{n}^* \cdot \underset{\sim}{S}^* \underset{\sim}{n}^*_j = \underset{\sim\sim}{Q}\underset{\sim}{n}_i \cdot \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{S}\,\underset{\sim}{Q}^T\,\underset{\sim\sim}{Q}\underset{\sim}{n}_j = \underset{\sim\sim}{Q}\underset{\sim}{n}_i \cdot \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim\sim}{S}\underset{\sim}{n}_j =$$

$$= \underset{\sim\sim}{S}\underset{\sim}{n}_j \cdot \underset{\sim}{Q}^T\,\underset{\sim\sim}{Q}\underset{\sim}{n}_i = \underset{\sim}{n}_i \cdot \underset{\sim\sim}{S}\underset{\sim}{n}_j$$

i.e., por

$$(6.10.9) \qquad \underset{\sim}{n}^* \cdot \underset{\sim}{S}^* \underset{\sim}{n}^*_j = \underset{\sim}{S}^* \cdot \underset{\sim}{n}^*_i \otimes \underset{\sim}{n}^*_j = \underset{\sim}{n}_i \cdot \underset{\sim\sim}{S}\underset{\sim}{n}_j = \underset{\sim}{S} \cdot \underset{\sim}{n}_i \otimes \underset{\sim}{n}_j =$$

$$= Q_{ki}\, S_{km}\, Q_{mj} = S'_{ij} = S_i\, \delta_{ij}, \text{ (não soma em } i).$$

Resulta que quando o mesmo tensor ortogonal $\underset{\sim}{Q}$ efetua a transformação de semelhança (10.8) e a transformação de base (10.7), $\underset{\sim}{S}$ tem em relação a base canônica $\mathbb{N}$ os mesmos auto-

valores que $\underset{\approx}{S}^*$ em relação a base canônica $\mathbb{N}^*$.

De (6.10.9) obtemos o seguinte resultado, análogo ao expresso por (4.13.3) para o caso de $\underset{\approx}{T}$:

$$(6.10.10) \qquad S'_{ij} = S_i \, \delta_{ij} = \underset{\approx}{S} \cdot \underset{\approx}{n}_i \otimes \underset{\approx}{n}_j = \underset{\approx}{S}^* \cdot \underset{\approx}{n}^*_i \otimes \underset{\approx}{n}^*_j =$$
$$= \underset{\approx}{Q}^T \underset{\approx\approx}{S} \underset{\approx}{Q} \cdot \underset{\approx}{e}_i \otimes \underset{\approx}{e}_j, \quad \text{(não soma)},$$

onde $\underset{\approx}{Q}^T \underset{\approx}{S} \underset{\approx}{Q}$ é a transformação de semelhança ortogonal inversa do tensor $\underset{\approx}{S}$.

Resumindo, vemos que a mesma diagonalização (mesmos autovalores) de um tensor simétrico $\underset{\approx}{S}$ é obtida referindo-o a sua base canônica $\mathbb{N}$ ou referindo o seu semelhante $\underset{\approx}{S}^* = \underset{\approx}{Q} \underset{\approx}{S} \underset{\approx}{Q}^T$ a base canônica rodada $\mathbb{N}^*$. A equação (6.10.6) é a expressão matricial de $(6.10.10)_4$.

6.11 - Tensores simétricos não-negativos.

Um tensor simétrico $\underset{\approx}{S}$ é chamado de <u>não-negativo</u> se, para qualquer $\underset{\approx}{v} \in \mathbb{V}$,

$$(6.11.1) \qquad \underset{\approx}{v} \cdot \underset{\approx\approx}{S} \underset{\approx}{v} \geq 0.$$

Se $\underset{\approx}{v} \neq \underset{\approx}{0}$, o tensor $\underset{\approx}{S}$ é chamado de <u>positivo</u> e se o número real $\underset{\approx}{v} \cdot \underset{\approx\approx}{S} \underset{\approx}{v}$ é nulo somente quando $\underset{\approx}{v} = \underset{\approx}{0}$, o tensor $\underset{\approx}{S}$ é chamado de <u>positivo definido</u>.

Os autovalores de um tensor não-negativo são números não-negativos, pois, se S é um autovalor de $\underset{\approx}{S}$ correspondente a um autoversor $\underset{\approx}{n}$,

$$(6.11.2) \qquad \underset{\approx}{n} \cdot \underset{\approx\approx}{S} \underset{\approx}{n} = S \underset{\approx}{n} \cdot \underset{\approx}{n} \geq 0,$$

e, consequentemente, $S \geq 0$.

Podemos concluir também que um tensor simétrico não-negativo é positivo definido se e somente se ele for não-singular (inversível). De fato, temos

$$\det \underset{\sim}{S} = S_1 S_2 S_3 \tag{6.11.3}$$

e $\det \underset{\sim}{S} > 0$ significa que os autovalores não são nulos e portanto que $\underset{\sim}{n} \cdot \underset{\sim}{S}\underset{\sim}{n}$ só seria nulo se $\underset{\sim}{n}$ fosse nulo. O tensor projeção definido por (3.12.1) é um exemplo de tensor simétrico não-negativo que não é inversível, i.e., que não é positivo definido.

6.12 - Raiz quadrada de um tensor.

Dizemos que um tensor $\underset{\sim}{H}$ é a raiz quadrada de um tensor $\underset{\sim}{T}$ se

$$\underset{\sim}{H}^2 = \underset{\sim}{T}. \tag{6.12.1}$$

Essa equação, dependendo de $\underset{\sim}{T}$, pode não ter nenhuma solução, pode ter um número infinito de soluções ou pode ter um número finito de soluções. Entretanto, se $\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{S}$ é um tensor simétrico não-negativo, a solução

$$\underset{\sim}{H} = \sqrt{\underset{\sim}{S}} \tag{6.12.2}$$

é um tensor simétrico não-negativo único.

Além disso, todo tensor permutável com $\underset{\sim}{S}$ é permutável também com $\underset{\sim}{H} = \sqrt{\underset{\sim}{S}}$. Em conseqüência, temos que o produto de tensores não-negativos permutáveis é um tensor não-negativo.

Resulta então em particular que polinômios com coeficientes reais não-negativos em tensores simétricos não-negativos são também tensores simétricos não-negativos.

CAPÍTULO 7

DECOMPOSIÇÕES DE UM TENSOR

7.1 - Decomposição espectral de tensor simétrico.

Os autoversores de um tensor simétrico formam uma base ortogonal $\mathbb{N} = \{\underset{\sim}{n}_i\}$, portanto, de acordo com (3.11.3) temos o desdobramento

$$\underset{\sim}{S} = S'_{ij}\, \underset{\sim}{n}_i \otimes \underset{\sim}{n}_j; \tag{7.1.1}$$

onde os componentes rodados S'_{ij} são dados por (6.10.4). Então, temos

$$\underset{\sim}{S} = S_i\, \delta_{ij}\, \underset{\sim}{n}_i \otimes \underset{\sim}{n}_j, \quad \text{(não soma em } i\text{)}, \tag{7.1.2}$$

e daí

$$\underset{\sim}{S} = \sum_{i=1}^{3} S_i\, \underset{\sim}{n}_i \otimes \underset{\sim}{n}_i, \tag{7.1.3}$$

que representa a <u>decomposição espectral</u> do tensor $\underset{\sim}{S}$.

Quanto ao tensor rodado $\underset{\sim}{S}^*$, de acordo com (6.10.9) temos a combinação linear

$$\underset{\sim}{S}^* = S'_{ij}\, \underset{\sim}{n}^*_i \otimes \underset{\sim}{n}^*_j \tag{7.1.4}$$

e a decomposição espectral,

$$\underset{\sim}{S}^* = \sum_{i=1}^{3} S_i\, \underset{\sim}{n}^*_i \otimes \underset{\sim}{n}^*_i . \tag{7.1.5}$$

1. Se os três autovalores de $\underset{\sim}{S}$ são diferentes, temos de (7.1.3),

(7.1.6) $\underset{\sim}{S} = S_1 \underset{\sim}{n}_1 \otimes \underset{\sim}{n}_1 + S_2 \underset{\sim}{n}_2 \otimes \underset{\sim}{n}_2 + S_3 \underset{\sim}{n}_3 \otimes \underset{\sim}{n}_3$,

e os auto-espaços de $\underset{\sim}{S}$ são os três eixos $(\underset{\sim}{n}_1)_{\underset{\sim}{0}}$, $(\underset{\sim}{n}_2)_{\underset{\sim}{0}}$ e $(\underset{\sim}{n}_3)_{\underset{\sim}{0}}$ gerados, respectivamente por $\underset{\sim}{n}_1$, $\underset{\sim}{n}_2$ e $\underset{\sim}{n}_3$. A representação matricial de (7.1.6) é

(7.1.7) $$[\underset{\sim}{S}]' = S_1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + S_2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ S_3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 \end{vmatrix}.$$

2. No caso de dois autovalores iguais, por exemplo, $S_1 = S_2$, temos

(7.1.8) $$[\underset{\sim}{S}]' = S_1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + S_3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_1 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 \end{vmatrix},$$

que é a expressão matricial de

(7.1.9) $$\underset{\sim}{S} = S_1(\underset{\sim}{n}_1 \otimes \underset{\sim}{n}_1 + \underset{\sim}{n}_2 \otimes \underset{\sim}{n}_2) + S_3 \underset{\sim}{n}_3 \otimes \underset{\sim}{n}_3 =$$
$$= S_1(\underset{\sim}{1} - \underset{\sim}{n}_3 \otimes \underset{\sim}{n}_3) + S_3 \underset{\sim}{n}_3 \otimes \underset{\sim}{n}_3 .$$

Os auto-espaços de $\underset{\sim}{S}$ são o eixo gerado por $\underset{\sim}{n}_3$ e o plano gerado por $\underset{\sim}{n}_1$ e $\underset{\sim}{n}_2$.

3. Se $S_1 = S_2 = S_3$, então

(7.1.10) $$\underset{\sim}{S} = S\,\underset{\sim}{1},$$

e o único auto-espaço de $\underset{\sim}{S}$ é o espaço V.

Comparando com o exemplo dado pelas matrizes (3.13.2) e (3.13.3) vemos que (7.1.9) pode ser expresso por

(7.1.11) $$\underset{\sim}{S} = S_1 \underset{\sim}{P} + S_3 (\underset{\sim}{1} - \underset{\sim}{P}),$$

onde $\underset{\sim}{P}$ é o tensor projeção ortogonal ao plano $(\underset{\sim}{n}_1, \underset{\sim}{n}_2)_{\underset{\sim}{0}}$.

7.2 - Exemplos de determinação de autovalores e autoversores de tensor simétrico.

1. Autovalores distintos. Seja um tensor que em relação a uma base $\mathbb{B} = \{\underset{\sim}{e}_i\}$ é representado pela matriz

$$[\underset{\sim}{S}] = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} .$$

A matriz característica de $\underset{\sim}{S}$ é dada por

$$[\underset{\sim}{S} - S\underset{\sim}{1}] = \begin{vmatrix} 7-S & -2 & 0 \\ -2 & 6-S & -2 \\ 0 & -2 & 5-S \end{vmatrix}$$

e a equação característica por

$$\det [\underset{\sim}{S} - S\underset{\sim}{1}] = \Delta(S) = S^3 - 18\, S^2 + 99\, S - 162 = 0.$$

Essa cúbica tem as raizes $S_1 = 3$, $S_2 = 6$ e $S_3 = 9$ que são os autovalores de $\underset{\sim}{S}$. Então, a representação diagonal desse tensor é

$$[\underset{\sim}{S}]' = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 3[n_1 \otimes n_1] + 6[n_2 \otimes n_2] + 9[n_3 \otimes n_3].$$

Para determinar os autoversores usamos o sistema de equações (6.10.3) que pode ser expresso por

$$(7.2.1) \qquad (S_{ij} - S_k \delta_{ij}) n_{kj} = 0 \quad \text{(não soma em } k);$$

que representa três sistemas de três equações; um sistema para $k = 1$ $(S_1 = 3)$, outro para $k = 2$ $(S_2 = 6)$ e o terceiro para $k = 3$ $(S_3 = 9)$. Cada sistema fornece os componentes $j = 1,2,$ do autoversor $\underset{\sim}{n}_k$ correspondente ao autovalor S_k.

Nesse exemplo temos os três sistemas

$$\begin{cases} (7 - S_k)\, n_{k1} - 2\, n_{k2} = 0, \\ -2\, n_{k1} + (6 - S_k)\, n_{k2} - 2\, n_{k3} = 0, \quad \text{(não soma em } k) \\ -2\, n_{k1} + (5 - S_k)\, n_{k3} = 0, \end{cases}$$

que fornece os resultados

$$\begin{cases} \underset{\sim}{n}_1 = (1/3,\ 2/3,\ 2/3) = (1/3)(\underset{\sim}{e}_1 + 2\, \underset{\sim}{e}_2 + 2\, \underset{\sim}{e}_3), \\ \underset{\sim}{n}_2 = (2/3,\ 1/3,\ -2/3) = (1/3)(2\, \underset{\sim}{e}_1 + \underset{\sim}{e}_2 - 2\, \underset{\sim}{e}_3), \\ \underset{\sim}{n}_3 = (-2/3,\ 2/3,\ -1/3) = (1/3)(-2\, \underset{\sim}{e}_1 + 2\, \underset{\sim}{e}_2 - \underset{\sim}{e}_3), \end{cases}$$

que são três versores ortonormais, base canônica de $\underset{\sim}{S}$.

O tensor ortogonal que transforma a base primitiva $B = \{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$ na nova base de autoversores tem componentes dados por (10.2), i.e., é representado pela matriz

$$[\underset{\sim}{Q}] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{21} & n_{31} \\ n_{12} & n_{22} & n_{32} \\ n_{13} & n_{23} & n_{33} \end{bmatrix}$$

De fato, de acordo com (6.10.6) essa matriz diagonaliza a matria $[\underset{\sim}{S}]$, i.e.,

$$\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

2. Dois autovalores iguais. O tensor $\underset{\sim}{S}$ em relação a uma base $\mathbb{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é representado pela matriz

$$[\underset{\sim}{S}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

A equação oaracterística

$$S^3 - 27\,S - 54 = 0,$$

tem raizes $S_1 = S_2 = -3$ e $S_3 = 6$, que, são os autovalores de $\underset{\sim}{S}$. Então,

$$[\underset{\sim}{S}]' = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = -3[\underset{\sim}{1} - \underset{\sim}{n}_3 \otimes \underset{\sim}{n}_3] + 6[\underset{\sim}{n}_3 \otimes \underset{\sim}{n}_3]$$

é a representação diagonal de $\underset{\sim}{S}$.

Para determinar os autoversores usamos os sistemas (7.2.1). No caso da raiz dupla, $S_1 = S_2 = -3$, temos o sistema

$$\begin{cases} 4\,n_{k1} + 2\,n_{k2} - 4\,n_{k3} = 0 \\ 2\,n_{k1} + n_{k2} - 2\,n_{k3} = 0 \\ -4\,n_{k1} - 2\,n_{k2} + 4\,n_{k3} = 0 \end{cases}$$

tanto para $k = 1$ quanto para $k = 2$. Esse sistema reduz-se a uma única equação não-trivial

$$2\,n_{k1} + n_{k2} - 2\,n_{k3} = 0, \tag{7.2.2}$$

cujas soluções não-triviais determinam autoversores correspondentes aos autovalores $S_1 = S_2 = -3$.

Tendo em vista que os autoversores são mutuamente perpendiculares, i.e., que $\underset{\sim}{n}_3 \cdot \underset{\sim}{n}_1 = \underset{\sim}{n}_3 \cdot \underset{\sim}{n}_2 = 0$, com os coeficientes de (7.2.2) temos que

$$\underset{\sim}{n}_3 = (2/3,\ 1/3,\ -2/3) = (1/3)(2\ \underset{\sim}{e}_1 + \underset{\sim}{e}_2 - 2\ \underset{\sim}{e}_3)$$

é o autoversor de $\underset{\sim}{S}$ correspondente ao autovalor simples $S_3 = 6$. Um outro autoversor, por exemplo $\underset{\sim}{n}_1$ é dado por uma solução arbitrária de (7.2.2)

$$\underset{\sim}{n}_1 = (1/3,\ 2/3,\ 2/3) = (1/3)(\underset{\sim}{e}_1 + 2\ \underset{\sim}{e}_2 + 2\ \underset{\sim}{e}_3).$$

O terceiro autoversor $\underset{\sim}{n}_2$ sendo perpendicular a $\underset{\sim}{n}_1$ e $\underset{\sim}{n}_3$ é dado pelo produto vetorial $\underset{\sim}{n}_3 \times \underset{\sim}{n}_1 = \underset{\sim}{n}_2$ que coloca $\underset{\sim}{n}_2$ na ordem direita. Os componentes de $\underset{\sim}{n}_2$, de acordo com (5.1.1), são dados por

$$n_{2i} = \epsilon_{ijk}\, n_{3j}\, n_{1k},$$

i.e.,

$$\underset{\sim}{n}_2 = (2/3,\ -2/3,\ 1/3) = (1/3)(2\ \underset{\sim}{e}_1 - 2\ \underset{\sim}{e}_2 + \underset{\sim}{e}_3).$$

Então, a matriz do tesnor que transforma a base $\mathbb{B} = \{\underset{\sim}{e}_i\}$ na base $\mathbb{N} = \{\underset{\sim}{n}_i\}$ é dada por

$$[\underset{\sim}{Q}] = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

7.3 - Decomposição tríplice de um tensor.

A decomposição de um tensor $\underset{\sim}{T}$ nas suas parcelas simétrica e antissimétrica dada por (3.7.6) pode ser estendida decompondo a parcela simétrica em duas, i.e.,

$$\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{S} + \underset{\sim}{W} = \underset{\sim}{E} + \underset{\sim}{D} + \underset{\sim}{W}. \tag{7.3.1}$$

A parcela $\underset{\sim}{E}$ é um tensor escalar ou tensor esférico que é simétrico e definido por

$$\underset{\sim}{E} = \frac{1}{3} I_1 \underset{\sim}{1} = \frac{1}{3} (\mathrm{tr}\ \underset{\sim}{T})\underset{\sim}{1}, \tag{7.3.2}$$

com componentes

$$E_{ij} = \frac{1}{3} T_{kk} \delta_{ij}. \tag{7.3.3}$$

A parcela $\underset{\sim}{D}$ é um tensor simétrico definido por

$$\underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{S} - \underset{\sim}{E} = \frac{1}{2} (\underset{\sim}{T} + \underset{\sim}{T}^T) - \frac{1}{3} (\mathrm{tr}\ \underset{\sim}{T})\underset{\sim}{1}, \tag{7.3.4}$$

com componentes

$$D_{ij} = S_{ij} - E_{ij} = \frac{1}{2} (T_{ij} + T_{ji}) = \frac{1}{3} T_{kk} \delta_{ij}, \tag{7.3.5}$$

chamado de tensor deviante do tensor $\underset{\sim}{T}$ ou do tensor $\underset{\sim}{S}^T$.

Vemos que o tensor deviante é um tensor simétrico de traço nulo, i.e.,

$$\mathrm{tr}\ \underset{\sim}{D} = D_{ii} = 0. \tag{7.3.6}$$

O tensor $\underset{\sim}{W}$ é a parcela antissimétrica de $\underset{\sim}{T}$ definida em (3.7.8), com componentes dados por (5.3.4) e que também tem traço nulo, i.e.,

$$\underset{\sim}{W} = \frac{1}{2} (\underset{\sim}{T} - \underset{\sim}{T}^T), \tag{7.3.7}$$

$$(7.3.8) \qquad [\underset{\sim}{W}] = \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{bmatrix} .$$

7.4 - Representação de um tensor assimétrico.

A parcela simétrica $\underset{\sim}{S}$ de um tensor assimétrico $\underset{\sim}{T}$ é sempre um tensor diagonal, i.e., em relação a uma base ortogonal de autoversores de $\underset{\sim}{S}$ (base canônica ortogonal) a matriz desse tensor é

$$(7.4.1) \qquad [\underset{\sim}{S}]' = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 \end{bmatrix} ,$$

onde os autovalores distintos ou iguais são simbolizados por S_1, S_2 e S_3. A parcela antissimétrica $\underset{\sim}{W}$ do tensor assimétrico $\underset{\sim}{T}$ é representada pela matriz (7.3.8) em relação a qualquer base e, em particular em relação a base canônica ortogonal do tensor $\underset{\sim}{S}$.

Então, em relação aos autoversores de $\underset{\sim}{S}$ o tensor $\underset{\sim}{T}$ pode ser representado por

$$(7.4.2) \qquad [T]' = [S]' + [W] = \begin{bmatrix} S_1 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & S_2 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & S_3 \end{bmatrix} ,$$

e as parcelas esférica e deviante, respectivamente por

$$(7.4.3) \qquad [\underset{\sim}{E}]' = \begin{bmatrix} \text{tr } \underset{\sim}{S}/3 & 0 & 0 \\ 0 & \text{tr } \underset{\sim}{S}/3 & 0 \\ 0 & 0 & \text{tr } \underset{\sim}{S}/3 \end{bmatrix}$$

$$(7.4.4) \qquad [\underset{\sim}{D}]' = [\underset{\sim}{S}]' = [\underset{\sim}{E}]' = \begin{bmatrix} S_1 - (\text{tr } \underset{\sim}{S}/3) & 0 & 0 \\ 0 & S_2 - (\text{tr } \underset{\sim}{S}/3) & 0 \\ 0 & 0 & S_3 - (\text{tr } \underset{\sim}{S}/3) \end{bmatrix}$$

onde

$$(7.4.5) \qquad \text{tr } \underset{\sim}{S} = S_1 + S_2 + S_3 .$$

7.5 - Invariantes do tensor esférico.

Os momentos do tensor $\underset{\sim}{E}$ são dados por

$$(7.5.1) \begin{cases} I_1^{\underset{\sim}{E}} = \text{tr } \underset{\sim}{E} = \text{tr } \underset{\sim}{T} = I_1^{\underset{\sim}{I}}, \\ I_2^{\underset{\sim}{E}} = \text{tr } \underset{\sim}{E}^2 = \text{tr}\left(\frac{1}{9}(\text{tr}^2 \underset{\sim}{T})\underset{\sim}{1}\right) = \frac{1}{3}\text{tr}^2 \underset{\sim}{T} = \frac{1}{3}(I_1^{\underset{\sim}{T}})^2 \\ I_3^{\underset{\sim}{E}} = \text{tr } \underset{\sim}{E}^3 = \text{tr}\left(\frac{1}{27}(\text{tr}^3 T)1\right) = \frac{1}{9}\text{tr}^3 T = \frac{1}{9}(I_1^{\underset{\sim}{T}})^3 . \end{cases}$$

Então, os invariantes principais de $\underset{\sim}{E}$ são

$$(7.5.2) \begin{cases} I_1^{\underset{\sim}{E}} = \text{tr } \underset{\sim}{E} = I_1^{\underset{\sim}{T}} = \text{tr } \underset{\sim}{T}, \\ I_2^{\underset{\sim}{E}} = \frac{1}{2}(\text{tr}^2 \underset{\sim}{E} - \text{tr } \underset{\sim}{E}^2) = \frac{1}{3}(I_1^{\underset{\sim}{T}})^2 = \frac{1}{3}\text{tr}^2 \underset{\sim}{T}, \\ I_3^{\underset{\sim}{E}} = \frac{1}{6}(\text{tr}^3 \underset{\sim}{E} - 3\,\text{tr } \underset{\sim}{E}^2\,\text{tr } \underset{\sim}{E} + 2\,\text{tr } \underset{\sim}{E}^3) = \frac{1}{27}(I_1^{\underset{\sim}{T}})^3 = \frac{1}{27}\text{tr}^3 \underset{\sim}{T} \end{cases}$$

Os autovalores do tensor $\underset{\sim}{E}$ são as raizes iguais

$$(7.5.3) \qquad E_1 = E_2 = E_3 = \frac{1}{3} I_1^{\underset{\sim}{T}} = \frac{1}{3} \operatorname{tr} \underset{\sim}{T},$$

da sua equação característica

$$(7.5.4) \qquad \det(\underset{\sim}{E} - E\underset{\sim}{1}) = -E^3 + I_1^{\underset{\sim}{E}} E^2 - I_2^{\underset{\sim}{E}} E + I_3^{\underset{\sim}{E}} = 0.$$

7.6 - Invariantes de tensor simétrico.

Os momentos do tensor $\underset{\sim}{S}$ são dados por

$$(7.6.1) \begin{cases} I_1^{\underset{\sim}{S}} = \operatorname{tr} \underset{\sim}{S} = S_1 + S_2 + S_3 = \operatorname{tr} \underset{\sim}{T} = I_1^{\underset{\sim}{T}} \\ I_2^{\underset{\sim}{S}} = \operatorname{tr} \underset{\sim}{S}^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2, \\ I_3^{\underset{\sim}{S}} = \operatorname{tr} \underset{\sim}{S}^3 = S_1^3 + S_2^3 + S_3^3. \end{cases}$$

Os invariantes principais de $\underset{\sim}{S}$ podem ser expressos por

$$(7.6.2) \begin{cases} I_1^{\underset{\sim}{S}} = \operatorname{tr} \underset{\sim}{S} = \operatorname{tr} \underset{\sim}{T} = I_1^{\underset{\sim}{T}} = S_1 + S_2 + S_3, \\ I_2^{\underset{\sim}{S}} = \frac{1}{2} (\operatorname{tr}^2 \underset{\sim}{S} - \operatorname{tr} \underset{\sim}{S}^2) = S_1S_2 + S_1S_3 + S_2S_3, \\ I_3^{\underset{\sim}{S}} = \det \underset{\sim}{S} = S_1 S_2 S_3. \end{cases}$$

A equação característica do tensor simétrico é

$$(7.6.3) \qquad \det(\underset{\sim}{S} - S\underset{\sim}{1}) = -S^3 + I_1^{\underset{\sim}{S}} S^2 - I_2^{\underset{\sim}{S}} S + I_3^{\underset{\sim}{S}} = 0.$$

Vemos que tanto os momentos como os invariantes principais são funções polinomiais simétricas dos autovalores. As funções (7.6.2) são polinômios simétricos elementares.

7.7 - Invariantes de tensor antissimétrico.

Partindo da representação matricial (7.3.8) do tensor $\underset{\sim}{W}$, obtemos

$$(7.7.1) \qquad [\underset{\sim}{W}^2] = \begin{bmatrix} -(w_2^2 + w_3^2) & w_1 w_2 & w_1 w_3 \\ w_1 w_2 & -(w_1^2 + w_3^2) & w_2 w_3 \\ w_1 w_3 & w_2 w_3 & -(w_1^2 + w_2^2) \end{bmatrix},$$

que é uma matriz simétrica, e,

$$(7.7.2) \quad [\underset{\sim}{W}^3] = \begin{bmatrix} 0 & w_3(w_1^2+w_2^2+w_3^2) & -w_2(w_1^2+w_2^2+w_3^2) \\ -w_3(w_1^2+w_2^2+w_3^2) & 0 & w_1(w_1^2+w_2^2+w_3^2) \\ w_2(w_1^2+w_2^2+w_3^2) & -w_1(w_1^2+w_2^2+w_3^2) & 0 \end{bmatrix},$$

que, é uma matriz antissimétrica. Então, os momentos de $\underset{\sim}{W}$ são

$$(7.7.3) \quad \begin{cases} \bar{I}_1^{\underset{\sim}{W}} = \operatorname{tr} \underset{\sim}{W} = 0, \\ \bar{I}_2^{\underset{\sim}{W}} = \operatorname{tr} \underset{\sim}{W}^2 = -2(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) = -2\, \underset{\sim}{w}^2, \\ \bar{I}_3^{\underset{\sim}{W}} = \operatorname{tr} \underset{\sim}{W}^3 = 0. \end{cases}$$

Os invariantes principais do tensor antissimétrico são

$$(7.7.4) \quad \begin{cases} I_1^{\underset{\sim}{W}} = \bar{I}_1^{\underset{\sim}{W}} = \operatorname{tr} \underset{\sim}{W} = 0, \\ I_2^{\underset{\sim}{W}} = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} \underset{\sim}{W}^2 = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = \underset{\sim}{w}^2, \\ I_3^{\underset{\sim}{W}} = \det \underset{\sim}{W} = 0. \end{cases}$$

A equação característica do tensor $\underset{\sim}{W}$ é, então,

$$(7.7.5) \qquad \det(\underset{\sim}{W} - W\underset{\sim}{1}) = -W^3 - I_2^{\underset{\sim}{W}} W = 0,$$

cujas raizes são

$$(7.7.6)\qquad \begin{cases} W_1 = i(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2)^{1/2} = i\|\underset{\sim}{w}\| = iw, \\ W_2 = -i(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2)^{1/2} = -i\|\underset{\sim}{w}\| = -iw, \\ W_3 = 0, \end{cases}$$

i.e., o tensor antissimétrico não tem autovalores não-nulos sobre o corpo dos números reais.

7.8 - Invariantes do tensor deviante.

Os invariantes principais do tensor deviante são dados por

$$(7.8.1)\begin{cases} I_1^{\underset{\sim}{D}} = \operatorname{tr} \underset{\sim}{D} = D_1 + D_2 + D_3 = 0, \\ I_2^{\underset{\sim}{D}} = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \underset{\sim}{D}^2 = D_1D_2 + D_1D_3 + D_2D_3 = \\ = S_1S_2 + S_1S_3 + S_2S_3 - \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + S_3)^2 = \\ = I_2^{\underset{\sim}{S}} - \frac{1}{3}(I_1^{\underset{\sim}{S}})^2 = -\frac{1}{6}((S_1-S_2)^2 + (S_1-S_2)^2 + (S_2-S_3)^2) = \\ = \frac{1}{6}((D_1 - D_2)^2 + (D_1 - D_3)^2 + (D_2 - D_3)^2), \\ I_3^{\underset{\sim}{D}} = \det D = \frac{1}{3} \operatorname{tr} D^3 = D_1 D_2 D_3 = \\ = \frac{1}{27}(3S_1 - I_1^{\underset{\sim}{T}})(3S_2 - I_1^{\underset{\sim}{T}})(3S_3 - I_1^{\underset{\sim}{T}}) = \\ = I_3^{\underset{\sim}{S}} - \frac{1}{3} I_1^{\underset{\sim}{S}} I_2^{\underset{\sim}{S}} + \frac{2}{27}(I_1^{\underset{\sim}{S}})^3. \end{cases}$$

A equação característica do tensor $\underset{\sim}{D}$ é a cúbica

$$(7.8.2)\qquad \det(D - D1) = -D^3 - I_2^{\underset{\sim}{D}} D^2 + I_3^{\underset{\sim}{D}} = 0,$$

cujas raizes são

$$(7.8.3)\qquad \begin{cases} D_1 = 2\alpha \text{ sen } (\psi + \frac{2\pi}{3}), \\ D_2 = 2\alpha \text{ sen } \alpha, \\ D_3 = 2\alpha \text{ sen } (\psi + \frac{4\pi}{3}), \end{cases}$$

onde

$$(7.8.4)\qquad \alpha = \sqrt{-\frac{1}{3} I_2^{\underset{\sim}{D}}} = \frac{1}{\sqrt{18}} \sqrt{(D_1-D_2)^2 + (D_1-D_3)^2 + (D_2-D_3)^2} =$$

$$= \sqrt{-\frac{1}{3} (I_2^{\underset{\sim}{S}} - \frac{1}{3}(I_1^{\underset{\sim}{S}})^2)} = \frac{1}{\sqrt{18}} \sqrt{(S_1-S_2)^2+(S_1-S_3)^2+(S_2-S_3)^2}$$

e,

$$(7.8.5)\qquad \sqrt{3} \tan \psi = \frac{(D_2-D_1)+(D_2-D_3)}{D_1 - D_3} = \frac{(S_2-S_1)+(S_2-S_3)}{S_1 - S_3} = \mu,$$

$$(7.8.6)\qquad \text{sen } 3\psi = 3 \text{ sen } \psi - 4 \text{ sen}^3\psi = -\frac{I_3^{\underset{\sim}{D}} \sqrt{27}}{2|I_2^{\underset{\sim}{D}}|^{3/2}} =$$

$$= -\frac{(I_3^{\underset{\sim}{S}} - \frac{1}{3} I_1^{\underset{\sim}{S}} I_2^{\underset{\sim}{S}} + \frac{2}{27} (I_1^{\underset{\sim}{S}})^3)\sqrt{27}}{2|I_2^{\underset{\sim}{S}} - \frac{1}{3} (I_1^{\underset{\sim}{S}})^2|^{3/2}},$$

com $-\pi/6 \leq \psi \leq \pi/6$. Então, $D_1 \geq D_2 \geq D_3$ e $D_1 > 0$, mas $D_3 < 0$; também, se $I_3^{\underset{\sim}{D}} > 0$, então $D_2 < 0$, $\psi < 0$ e se $I_3^{\underset{\sim}{D}} < 0$, então $D_2 > 0$ e $\psi > 0$.

O número μ definido em (7.8.5) é chamado de <u>parametro de Lode</u> e o número α definido em (7.8.4) caracteriza a <u>escala do deviante</u>. Com as fórmulas (7.8.4) a (7.8.5) vemos que para determinar os valores de α e $\mu(\psi)$, é suficiente conhecer os componentes do tensor deviante $\underset{\sim}{D}$ em relação a uma base qualquer.

7.9 - Tensores proporcionais.

Dois tensores $\underset{\approx}{T}$ e $\hat{\underset{\approx}{T}}$ são proporcionais se em relação a uma base arbitrária os componentes de um deles são proporcionais aos do outro, i.e., se

$$\hat{T}_{ij} = k\, T_{ij}, \tag{7.9.1}$$

onde k é um número real.

Evidentemente, todos os tensores esféricos são proporcionais entre si.

Para que dois tensores simétricos sejam proporcionais é necessário e suficiente que seus eixos principais sejam coincidentes e que sejam satisfeitas as duas igualdades

$$\frac{S_1}{\hat{S}_1} = \frac{S_2}{\hat{S}_2} = \frac{S_3}{\hat{S}_3}. \tag{7.9.2}$$

Para que dois deviantes sejam proporcionais, além da coincidência de seus eixos principais, é necessário e suficiente que seja satisfeita a igualdade

$$D_1/\hat{D}_1 = D_2/\hat{D}_2. \tag{7.9.3}$$

Tendo em vista $(7.8.1)_2$ e $(7.8.2)_2$ a condição (7.9.3) pode ser expressa por

$$|I_2^{\underset{\approx}{D}}/I_2^{\hat{\underset{\approx}{D}}}|^3 = |I_3^{\underset{\approx}{D}}/I_3^{\hat{\underset{\approx}{D}}}|^2. \tag{7.9.4}$$

Também, tendo em vista a definição do parâmetro de Lode por (7.8.5), temos que a igualdade desse parâmetro é outra expressão da condição necessária e suficiente para a proporcionalidade de dois deviantes cujos eixos principais coincidem, i.e.,

(7.9.5) $$\hat{\mu} = \mu$$

é equivalente a (7.9.3).

7.10 - Conceito de invariante.

Consideremos uma grandeza que sob uma certa transformação sofre alterações. Uma função qualquer dessa grandeza que sob a transformação dada não se altera é chamada de invariante.

Como exemplo, consideremos os componentes de um tensor (grandeza) sujeitos a uma transformação ortogonal da base de referência. Os componentes se alteram com a transformação mas a função escalar, $\text{tr}\,\underset{\sim}{T} = T_{ii}$, é um invariante. De fato, de acordo com (4.7.3) e (3.8.10), temos, tal como em (4.14.7)

(7.10.1) $$\text{tr}[\underset{\sim}{T}] = \text{tr}([\underset{\sim}{Q}][\underset{\sim}{T}]'[\underset{\sim}{Q}^T]) = \text{tr}([\underset{\sim}{Q}^T][\underset{\sim}{Q}][\underset{\sim}{T}]') = \text{tr}[\underset{\sim}{T}]'.$$

Aliás, $\text{tr}\,\underset{\sim}{T}$ é um invariante do tensor $\underset{\sim}{T}$ sob qualquer transformação da base efetuada por um tensor inversível, não necessariamente ortogonal $\underset{\sim}{A}$ definido em (4.8.1). Dizemos que $\text{tr}\,\underset{\sim}{T}$ é um invariante do tensor $\underset{\sim}{T}$ sob o grupo das transformações inversíveis (grupo dos automorfismos) do qual, o grupo das transformações ortogonais é um subgrupo próprio e em relação ao qual $\text{tr}\,\underset{\sim}{T}$ é também invariante.

Invariância sob o grupo de todas as transformações ortogonais é chamada de isotropia. Então, a função escalar de um tensor, $\text{tr}\,\underset{\sim}{T}$, é uma função isotrópica.

A invariância de uma função é sempre definida em relação a um dado conjunto de transformações.

7.11 - Invariantes escalares independentes de tensores.

Um tensor simétrico $\underset{\sim}{S}$ não tem mais de três invariantes escalares independentes. Esses podem ser seus três autovalores S_1, S_2 e S_3 em termo dos quais podem ser expressos quaisquer outros invariantes de $\underset{\sim}{S}$.

Seis invariantes escalares constituem um conjunto completo de invariantes de um tensor assimétrico. Esses seis invariantes podem ser, por exemplo, os três autovalores de sua parcela simétrica e os três componentes do vetor de sua parcela antissimétrica, $\underset{\sim}{w} = \text{vet}\ \underset{\sim}{W}$, referidas a base N dos autoversores da parcela simétrica.

Um tensor deviante tem no máximo dois invariantes escalares independentes porque, em relação a uma base canônica, $D_1 + D_2 + D_3 = 0$. Como invariantes escalares de $\underset{\sim}{D}$ podemos escolher, além de dois de seus autovalores, as grandezas α e ψ ou α e μ, definidas em (7.8.4), (7.8.5) ou (7.8.6).

Como invariante do tensor escalar $\underset{\sim}{E}$ podemos considerar o primeiro invariante principal $I_1 = \text{tr}\ \underset{\sim}{S} = S_1 + S_2 + S_3$.

Então, para um tensor simétrico, os elementos de um conjunto completo de invariantes escalares podem ser I_1, α e ψ.

Qualquer função de valor escalar dos invariantes de um tensor também é um invariante escalar do tensor. Por exemplo, a representação de um tensor arbitrário $\underset{\sim}{T}$ (assimétrico) pela matriz (7.4.2), sugere que os seis invariantes escalares de $\underset{\sim}{T}$ sejam expressos pelos polinômios:

$$
(7.11.1)\begin{cases}
I_1^* = \operatorname{tr} \underset{\sim}{S} = S_1 + S_2 + S_3, \\
{}_2^* = \operatorname{tr} \underset{\sim}{S}^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2, \\
I_3^* = \operatorname{tr} \underset{\sim}{S}^3 = S_1^3 + S_2^3 + S_3^3, \\
I_4^* = \underset{\sim}{w} \cdot \underset{\sim}{w} = w_1^2 + s_2^2 + w_3^2, \\
I_5^* = \underset{\sim}{w} \cdot \underset{\sim}{S}\underset{\sim}{w} = S_1 w_1^2 + S_2 w_2^2 + S_3 w_3^2, \\
I_6^* = \underset{\sim}{w} \cdot \underset{\sim}{S}^2 \underset{\sim}{w} = S_1^2 w_1^2 + S_2^2 w_2^2 + S_3^2 w_3^2.
\end{cases}
$$

Em (6.8.1) vimos que um tensor ortogonal que efetua rotações planas em torno de um eixo que passa por uma origem e reflexões desse eixo em relação a origem, tem um invariante independente que é o ângulo θ da rotação.

7.12 - Propriedades extremas de tensores simétricos.

Trata-se de determinar os maiores e menores valores dos componentes S_{ij} de um tensor simétrico $\underset{\sim}{S}$, considerando tanto os três componentes da diagonal principal $(i=j)$ chamados de componentes diagonais ou de componentes normais, como os três componentes independentes não-diagonais $(i \neq j)$ chamados de componentes cisalhantes.

equação

$$
(7.12.1) \qquad S_N = \underset{\sim}{n} \cdot S \underset{\sim}{n} = S_{ij}\, n_i\, n_j
$$

descreve os componentes diagonais de $\underset{\sim}{S}$ associados com a direção genérica dada pelo versor arbitrário $\underset{\sim}{n}$. O escalar S_N é

chamado de componente normal de $\underset{\sim}{S}$ na direção $\underset{\sim}{n}$.

Para o tensor $\underset{\sim}{S}$ fixo, a determinação dos valores extremos (estacionários) do escalar S_N quando o versor $\underset{\sim}{n}$ varia em E_3, resulta em que o componente normal de $\underset{\sim}{S}$ é maior na direção do autoversor correspondente ao maior autovalor de $\underset{\sim}{S}$, e que o maior valor do componente normal é esse maior autovalor de $\underset{\sim}{S}$.

Admitindo que os autovalores de $\underset{\sim}{S}$ são diferentes e ordenando-os de acordo com

$$S_1 > S_2 > S_3, \tag{7.12.2}$$

temos que

$$\begin{cases} \max \; S_N = S_1, \\ \min \; S_N = S_3. \end{cases} \tag{7.12.3}$$

Quanto aos componentes não diagonais ou cisalhantes, eles são descritos por

$$S_c = \underset{\sim}{\ell} \cdot \underset{\sim}{\underset{\sim}{S}} \underset{\sim}{m} = S_{ij} \, \ell_i \, m_j, \tag{7.12.4}$$

onde S_c é chamado de componente cisalhante de $\underset{\sim}{S}$ nas direções dadas pelos versores ortogonais arbitrários $\underset{\sim}{\ell}$ e $\underset{\sim}{m}$. Nesse caso, levando em conta as desigualdades (1.1.2), os componentes cisalhantes de $\underset{\sim}{S}$ máximo e mínimo são dados por

$$\begin{cases} \max \; S_c = \frac{1}{2} (S_1 - S_3), \\ \min \; S_c = \frac{1}{2} (S_3 - S_1). \end{cases} \tag{7.12.5}$$

Esses valores são alcançados quando

$$(7.12.6)\qquad \begin{cases} \underset{\sim}{\ell} = (\underset{\sim}{n}_1 + \underset{\sim}{n}_3)/\sqrt{2}, \\ \underset{\sim}{m} = (\underset{\sim}{n}_1 - \underset{\sim}{n}_3)/\sqrt{2}, \end{cases}$$

onde $\underset{\sim}{n}_1$ e $\underset{\sim}{n}_3$ são os autoversores de $\underset{\sim}{S}$ correspondentes ao maior e menor autovalores S_1 e S_3.

Segue-se que os valores estacionários de S_{ij} são atingidos em relação a uma base $\{\underset{\sim}{\ell}, \underset{\sim}{n}_2, \underset{\sim}{m}\}$ na qual um dos versores coincide com um autoversor de $\underset{\sim}{S}$ e os outros dois fazem ângulos de 45° com os outros autoversores de $\underset{\sim}{S}$.

Considerando a possibilidade do tensor $\underset{\sim}{S}$ ter autovalores iguais, em vez das desigualdades (7.12.2) temos que admitir as relações

$$(7.12.7)\qquad S_1 \geq S_2 \geq S_3,$$

e, nesse caso os extremos tornam-se contínuos e a superfície tensorial torna-se uma superfície de revolução. Quanto ao tensor deviante definido em (7.4.4), que também é simétrico, os autovalores são dados por

$$(7.12.8)\qquad \begin{cases} D_1 = S_1 - \frac{1}{3} I_1, \\ D_2 = S_2 - \frac{1}{3} I_1, \\ D_3 = S_3 - \frac{1}{3} I_1. \end{cases}$$

Então, de acordo com as desigualdades (7.12.2) temos

$$(7.12.9)\qquad D_1 > D_2 > D_3,$$

e consequentemente,

$$(7.12.10)\qquad \max D_{ij} = \frac{1}{2}(D_1 - D_3) = \frac{1}{2}(S_1 - S_3) = \max S_c.$$

7.13 - Estado de cisalhamento puro.

Em relação a uma base canônica de seus autoversores, um tensor simétrico $\underset{\sim}{S}$ é diagonal, o que significa que os componentes cisalhantes S_{12}, S_{13} e S_{23} são todos nulos. Por outro lado, dizemos que um tensor simétrico $\underset{\sim}{S}$ descreve um estado de cisalhamento puro se existe uma base em relação a qual os componentes normais são nulos, i.e., se

(7.13.1) $$S_{11} = S_{22} = S_{33} = 0.$$

Para que isso aconteça, é necessário e suficiente que

(7.13.2) $$\text{tr } \underset{\sim}{S} = I_1^{\underset{\sim}{S}} = 0.$$

Então, a decomposição de $\underset{\sim}{S}$, de acordo com (7.3.1), nas parcelas esféricas

(7.13.3) $$\underset{\sim}{E} = \frac{1}{3} \underset{\sim}{1} \text{ tr } \underset{\sim}{S}$$

e deviante

(7.13.4) $$\underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{S} - \underset{\sim}{E},$$

mostra que este tensor deviante representa um estado de cisalhamento puro.

7.14 - Decomposição polar de um tensor.

Qualquer tensor inversível (automorfismo) $\underset{\sim}{T}$ pode ser decomposto de duas formas seguintes:

(7.14.1) $$\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{V}\,\underset{\sim}{Q}.$$

Nessas decomposições, $\underset{\sim}{Q} \in \mathbb{O}$ é um tensor ortogonal do grupo de todos os tensores ortogonais e $\underset{\sim}{U}$ e $\underset{\sim}{V}$ são tensores simétricos positivos definidos, i.e., tensores simétricos cujos autovalores são todos positivos.

Os tensores $\underset{\sim}{U}$ e $\underset{\sim}{V}$ são ortogonalmente semelhantes, pois,

$$\underset{\sim}{U}^* = \underset{\sim}{V} = \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{U}\,\underset{\sim}{Q}^T. \tag{7.14.2}$$

Então, os autoversores $\underset{\sim}{n}^*$ de $\underset{\sim}{V}$ e $\underset{\sim}{n}$ de $\underset{\sim}{U}$ são rodados de acordo com (6.5.2) e, $\underset{\sim}{U}$ e $\underset{\sim}{V}$ pertencem a uma classe de semelhança do espaço vetorial S dos tensores simétricos, i.e., $\underset{\sim}{U}$ e $\underset{\sim}{V}$ tem propriedades geométricas equivalentes.

De um modo geral, o estudo das propriedades de um tensor pode ser facilitado quando ele é decomposto em outros tensores mais simples tais como as projeções da decomposição espectral, as parcelas simétrica e antissimétrica, as parcelas esférica, deviante e antissimétrica e, os fatores ortogonal e simétrico positivo definido nesse caso de decomposição polar de tensor inversível. Essas decomposições são todas invariantes em relação a transformações de bases e portanto independem da representação matricial do tensor.

Na decomposição polar, dado o tensor $\underset{\sim}{T}$, os tensores $\underset{\sim}{U}$ (ou $\underset{\sim}{V}$) e $\underset{\sim}{Q}$ devem ser obtidos com a seguinte seqüência de operações:

1. Determinamos o tensor

$$\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{U}^2 = \underset{\sim}{T}^T\,\underset{\sim}{T}, \tag{7.14.3}$$

ou o tensor

$$\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{V}^2 = \underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{T}^T, \tag{7.14.4}$$

que também são simétricos e positivos definidos.

2. Diagonalizamos o tensor $\underset{\sim}{C}$ (ou o tensor $\underset{\sim}{B}$) e calculamos a matriz

$$[U]' = \sqrt{[C]'}, \tag{7.14.5}$$

ou a matriz

$$[V]' = \sqrt{[B]'}. \tag{7.14.6}$$

3. Calculamos os autoversores de $\underset{\sim}{U}$ (iguais aos de $\underset{\sim}{C}$) ou os de $\underset{\sim}{V}$ (iguais aos de $\underset{\sim}{B}$) ficando então determinadas as matrizes ortogonais que transformam a base $\mathbb{B} = \{\underset{\sim}{e}_i\}$ na base $\mathbb{N} = \{\underset{\sim}{n}_i\}$ de $\underset{\sim}{U}$ (ou $\mathbb{N}^* = \{n_i^*\}$ de $\underset{\sim}{V}$).

4. Com essas matrizes ortogonais rodamos as matrizes diagonais $[\underset{\sim}{U}]'$ (ou $[\underset{\sim}{V}]'$) de volta às matrizes $[\underset{\sim}{U}]$ (ou $[\underset{\sim}{V}]$) referidas a base $\mathbb{B} = \{\underset{\sim}{e}_i\}$.

5. Caloulamos o tensor $\underset{\sim}{U}^{-1}$ (ou o tensor $\underset{\sim}{V}^{-1}$).

6. Calculamos o tensor $\underset{\sim}{Q}$ por meio da equação

$$\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{U}^{-1}, \tag{7.14.7}$$

ou por

$$\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{V}^{-1}\,\underset{\sim}{T}. \tag{7.14.8}$$

O tensor $\underset{\sim}{U}$ (ou o tensor $\underset{\sim}{V}$) é um tensor simétrico, positivo definido que mede deformaçõès do espaço pontual euclidiano $\mathbb{E}$. Simbolizamos por $\underset{\sim}{R}$ o tensor ortogonal da decomposição

polar de um tensor $\underset{\sim}{T}$ cujo determinante não muda de sinal durante a transformação por ele efetuada, permanecendo sempre positivo ou negativo. De acordo com (7.14.1), vemos que $\det \underset{\sim}{R} = +1$ se $\det \underset{\sim}{T} > 0$ e que $\det \underset{\sim}{R} = -1$ se $\det \underset{\sim}{T} < 0$. Na concretização da decomposição polar no espaço E, é costume chamar de deformação a transformação efetuada pelo tensor

$$\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{R}\,\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{V}\,\underset{\sim}{R} \tag{7.14.9}$$

que, entretanto, é a composição de rotação rígida e deformação propriamente dita.

7.15 - Exemplo de decomposição polar.

Consideremos um tensor $\underset{\sim}{T}$ que transforma em raio vetor $\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{0}$ em outro $\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{X} - \underset{\sim}{0}$, i.e.,

$$\underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{x}, \tag{7.15.1}$$

e que em relação a uma base $B = \{\underset{\sim}{e}_i\}$ é representado pela matriz

$$[\underset{\sim}{T}] = \begin{vmatrix} \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} . \tag{7.15.2}$$

Então, em componentes, a transformação (7.15.1) é expressa pelo sistema

$$\begin{cases} X_1 = \sqrt{3}\, x_1 + x_2, \\ X_2 = 2\, x_2, \\ X_3 = x_3, \end{cases} \tag{7.15.3}$$

e a transformação inversa

$$\underset{\sim}{x} = T^{-1}\,\underset{\sim}{X} \tag{7.15.4}$$

pelo sistema

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(X_1 - \dfrac{1}{2}X_2\right), \\ x_2 = X_2/2, \\ x_3 = X_3. \end{cases} \tag{7.15.5}$$

O mapeamento efetuado por $\underset{\sim}{T}$ não altera os raios vetores normais ao plano $(X_1,X_2)_{\underset{\sim}{Q}}$, e por isso pode ser considerado como uma transformação realizada nesse plano. Por exemplo, um círculo de raio igual a um e outro na origem, representado por

$$x_1^2 + x_2^2 = 1, \tag{7.15.6}$$

é, de acordo com (7.15.5), transformado pelo tensor $\underset{\sim}{T}$ na elipse descrita por

$$x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 = 3. \tag{7.15.7}$$

Essa elipse, se referida a uma base canônica, rodada de 45^0 no sentido positivo (anti-horário) em relação a base $B = \{e_i\}$, é representada por

$$\frac{(x_1^1)^2}{6} + \frac{(x_2^1)^2}{2} = 1. \tag{7.15.8}$$

O tensor $\underset{\sim}{T}$ atuando no raio vetor $\underset{\sim}{x}$ pode efetuar duas transformações, i.e., uma deformação propriamente dita por alongamento ou encurtamento de $\hat{\underset{\sim}{r}}$ e uma rotação desse raio vetor. No desdobramento $\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{R}\,\underset{\sim}{U}$, o tensor simétrico positivo definido $\underset{\sim}{U}$ efetua a deformação e o tensor ortogonal $\underset{\sim}{R}$ a rotação. Sob

o tensor $\underset{\sim}{U}$, dois raios ortogonais do círculo considerado conservam as suas direções (coincidentes com as direções principais de $\underset{\sim}{U}$) enquanto os seus comprimentos se alteram até os comprimentos dos semi-eixos da elipse. A rotação desses eixos é a efetuada pelo fator $\underset{\sim}{R}$ contido no tensor $\underset{\sim}{T}$.

Seguindo a seqüência de operações indicadas calculamos as matrizes

$$[\underset{\sim}{C}] = [\underset{\sim}{T}^T\underset{\sim}{T}] = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{7.15.9}$$

$$[\underset{\sim}{\Omega}]' = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{7.15.10}$$

$$[\underset{\sim}{U}]' = \sqrt{[\underset{\sim}{\Omega}]'} = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{7.15.11}$$

A matriz $[\underset{\sim}{Q}]$ que transforma a base $\mathbb{B} = \{\underset{\sim}{e}_i\}$ na base $\mathbb{N} = \{\underset{\sim}{n}_i\}$ de autoversores de $\underset{\sim}{U}$ que são iguais aos de $\underset{\sim}{C}$, é dada por

$$[\underset{\sim}{Q}] = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{7.15.12}$$

As colunas dessa matriz representam os autoversores $\underset{\sim}{n}_i$ do tensor $\underset{\sim}{U}$ e do tensor $\underset{\sim}{C}$. Vemos que $\underset{\sim}{n}_1$ e $\underset{\sim}{n}_2$ fazem ângulos de 60° com $\underset{\sim}{e}_1$ e $\underset{\sim}{e}_2$, respectivamente, enquanto que $\underset{\sim}{n}_3$ coincide com $\underset{\sim}{e}_3$.

Referindo $\underset{\sim}{U}$ de volta a base $\mathbb{B} = \{\underset{\sim}{e}_i\}$, temos

$$(7.15.13) \qquad [\underset{\sim}{U}] = [\underset{\sim}{Q}^T][\underset{\sim}{U}][\underset{\sim}{Q}] = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 3+\sqrt{3} & 3-\sqrt{3} & 0 \\ 3-\sqrt{3} & 1+3\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Com (5.5.6) calculamos

$$(7.15.14) \qquad [\underset{\sim}{U}^{-1}] = \frac{1}{4\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1+3\sqrt{3} & -3+\sqrt{3} & 0 \\ -3+\sqrt{3} & 3+\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 4\sqrt{6} \end{bmatrix},$$

e finalmente obtemos o tensor $\underset{\sim}{R}$ representado por

$$(7.15.15) \qquad [\underset{\sim}{R}] = [\underset{\sim}{T}][\underset{\sim}{U}^{-1}] = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{3}+1 & \sqrt{3}-1 & 0 \\ 1-\sqrt{3} & \sqrt{3}+1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Vemos que $\underset{\sim}{R}$ descreve uma rotação negativa de 15° em torno do eixo $(\underset{\sim}{n}_3)_Q$.

Quanto ao tensor $\underset{\sim}{V}$ semelhante ao tensor $\underset{\sim}{U}$, temos

$$(7.15.16) \qquad [\underset{\sim}{V}] = [\underset{\sim}{T}][\underset{\sim}{R}^T] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{3}+1 & \sqrt{3}-1 & 0 \\ \sqrt{3}-1 & \sqrt{3}+1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Os dois primeiros autoversores de $\underset{\sim}{V}$ fazem ângulos de 45° com os versores $\underset{\sim}{e}_1$ e $\underset{\sim}{e}_2$ enquanto que o terceiro coincide com $\underset{\sim}{e}_3$. Para interpretar geometricamente a decomposição $\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{R}\,\underset{\sim}{U}$ substituimos essa expressão em (7.15.1) para obtermos

$$(7.15.17) \qquad \underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{R}\,\underset{\sim}{U}\,\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{R}\,\underset{\sim}{\bar{x}}.$$

Podemos imaginar então que inicialmente o tensor $\underset{\sim}{U}$ de-

forma um raio $\underset{\sim}{x}$ do círculo inclinado de 60° em relação ao eixo $(x_1)_{\underset{\sim}{0}}$ no semi-eixo maior $\bar{\underset{\sim}{x}} = \underset{\sim}{U}\,\underset{\sim}{x}$ da elipse. Em seguida, $\underset{\sim\sim}{R}\bar{\underset{\sim}{x}} = \underset{\sim}{x}$, descreve uma rotação negativa de 15° do semi-eixo da elipse (Fig. 7.15.1).

Na decomposição $\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{V}\,\underset{\sim}{R}$, inicialmente o raio do círculo inclinado de 60° em relação a $(x_1)_{\underset{\sim}{0}}$ sofre uma rotação negativa de 15°. Em seguida esse raio é deformado por $\underset{\sim}{V}$ no semi-eixo maior da elipse que faz um ângulo de 45° com o eixo $(x_1)_{\underset{\sim}{0}}$, ângulo esse que coincide com o de uma direção principal de $\underset{\sim}{V}$ (Fig. 7.15.2).

As duas decomposições são equivalentes, produzindo ambas o mesmo resultado que é o da transformação efetuada pelo tensor $\underset{\sim}{T}$.

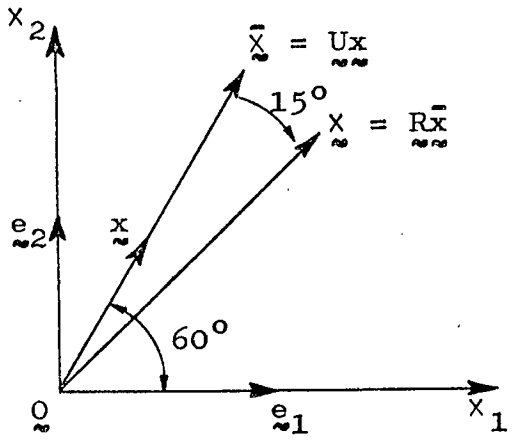

Fig. 7.15.1 - $T = \underset{\sim\sim}{RU}$.

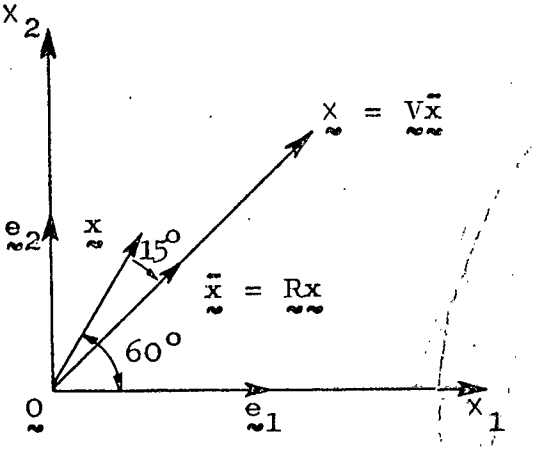

Fig. 7.15.2 - $T = \underset{\sim\sim}{VR}$.

Em (7.15.11), calculamos os antivalores de $\underset{\sim}{U}$ (iguais aos de $\underset{\sim}{V}$):

(7.15.18) $\qquad U_1 = V_1 = \sqrt{6}, \quad U_2 = V_2 = \sqrt{2}, \quad U_3 = V_3 = 1.$

Então, U_1 mede o comprimento do semi-eixo maior e U_2 o do semi-eixo menor da elipse, conforme mostra (7.15.8). Vemos que esses autovalores medem a razão de variação de comprimentos nas direções principais de $\underset{\sim}{U}$ ou $\underset{\sim}{V}$, sendo por isso chamados de alongações principais. As direções principais de $\underset{\sim}{U}$ e $\underset{\sim}{V}$, relacionadas por (7.15.15), nesse exemplo estão rodadas de 15° em torno do eixo $(\underset{\sim}{n}_3)_{\underset{\sim}{0}}$.

7.16 - Exemplo de decomposição tríplice.

Consideremos o mesmo tensor $\underset{\sim}{T}$ representado pela matriz (7.15.2). As parcelas do desdobramento tríplice de $\underset{\sim}{T}$ são

$$[\underset{\sim}{E}] = \text{tr}\,\underset{\sim}{T}\,[\underset{\sim}{1}] = \begin{bmatrix} 1+(\sqrt{3}/3) & 0 & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{3}/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\sqrt{3}/3 \end{bmatrix}, \tag{7.16.1}$$

$$[\underset{\sim}{S}] = \frac{1}{2}\,([\underset{\sim}{T}]+[\underset{\sim}{T}^T]) = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{7.16.2}$$

$$[\underset{\sim}{D}] = [\underset{\sim}{S}] - [\underset{\sim}{E}] = \begin{bmatrix} (2\sqrt{3}/3)-1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1-(\sqrt{3}/3) & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3}/3 \end{bmatrix}, \tag{7.16.3}$$

$$[\underset{\sim}{W}] = [\underset{\sim}{T}] - [\underset{\sim}{S}] = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{7.16.4}$$

Verifiquemos que

$$(7.16.5)\qquad I_1^{\underset{\sim}{D}} = \operatorname{tr} \underset{\sim}{D} = (2\sqrt{3}/3)-1 + 1 - (\sqrt{3}/3) - \sqrt{3}/3 = 0.$$

Vamos diagonalizar a parcela simétrica $\underset{\sim}{S}^T$ de $\underset{\sim}{T}$, calculando antes os invariantes principais dessa parcela que, são

$$(7.16.6)\qquad \begin{cases} I_1^{\underset{\sim}{S}} = I_1^{\underset{\sim}{T}} = 3 + \sqrt{3}, \\ I_2^{\underset{\sim}{S}} = 3\sqrt{3} + (7/4), \\ I_3^{\underset{\sim}{S}} = 2\sqrt{3} - (1/4). \end{cases}$$

Então, a equação característica de $\underset{\sim}{S}^T$ é

$$(7.16.7)\qquad \Delta(S) = -S^3 + (3+\sqrt{3})S^2 - (3\sqrt{3} + (7/4))S + 2\sqrt{3} - (1/4) = 0,$$

cujas raizes são

$$(7.16.8)\qquad \begin{cases} S_1 = (2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{2-\sqrt{3}})/2, \\ S_2 = (2 + \sqrt{3} - 2\sqrt{2-\sqrt{3}})/2, \\ S_3 = 1. \end{cases}$$

Resulta então que,

$$(7.16.9)\qquad [\underset{\sim}{S}]' = \begin{bmatrix} (2+\sqrt{3}+2\sqrt{2-\sqrt{3}})/2 & 0 & 0 \\ & (2+\sqrt{3}-2\sqrt{2-\sqrt{3}})/2 & 0 \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

e,

$$(7.16.10)\qquad [\underset{\sim}{D}]' = \begin{bmatrix} (\sqrt{3}+6\sqrt{2-\sqrt{3}})/6 & 0 & 0 \\ & (\sqrt{3}-6\sqrt{2-\sqrt{3}})/6 & 0 \\ 0 & 0 & -3/3 \end{bmatrix}.$$

CAPÍTULO 8

FUNÇÃO TENSORIAL $\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T})$

8.1 - Função tensorial isotrópica de um tensor.

Uma função $\underset{\sim}{F}: D_{\mathbb{L}} \to \mathbb{L}$ definida por

(8.1.1) $$\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T})$$

é isotrópica se a condição expressa por

(8.1.2) $$\underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{H}\,\underset{\sim}{Q}^{T} = \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T})\,\underset{\sim}{Q}^{T} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{Q}^{T}),$$

i.e., por

(8.1.3) $$\underset{\sim}{H}^{*} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T}^{*})$$

é satisfeita para qualquer tensor ortogonal $\underset{\sim}{Q} \in \mathbb{O}$. Vemos que transformações ortogonais do argumento e do valor não alteram a função (regra de correspondência) quando ela é isotrópica. Dizemos que a função é isotrópica quando o tensor rodado $\underset{\sim}{H}^{*}$ é a mesma função do tensor rodado $\underset{\sim}{T}^{*}$ que o tensor primitivo $\underset{\sim}{H}$ é do tensor primitivo $\underset{\sim}{T}$.

As funções isotrópicas expressas por (8.1.1), só dependem de um tensor variável $\underset{\sim}{T}$, do tensor unidade $\underset{\sim}{1}$ e de escalares constantes ou variáveis. O tensor $\underset{\sim}{1}$ fixa, através de seus componentes $\underset{\sim}{e}_i \cdot \underset{\sim}{e}_j = \delta_{ij}$, como ortonormal a base $\mathbb{B}$ ou $\mathbb{N}$ usada para referir os componentes de $\underset{\sim}{H}$ e de $\underset{\sim}{T}$. Os escalares constantes ou variáveis podem ser considerados como tensores esféricos da forma geral $k\,\underset{\sim}{1}$; $k \in \mathbb{R}$.

Um exemplo típico de função tensorial isotrópica de um tensor é o polinômio definido em (3.5.1), i.e.,

$$\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T}) = k_o \underset{\sim}{1} + k_1 \underset{\sim}{T} + k_2 \underset{\sim}{T}^2 + \ldots + k_m \underset{\sim}{T}^m, \tag{8.1.4}$$

onde os escalares k_i podem ser considerados como tensores esféricos $k_i \underset{\sim}{1}$. Em (4.14.4) mostramos que esse polinômio é de fato uma função isotrópica.

8.2 - Forma canônica de função tensorial isotrópica de um tensor simétrico.

As propriedades gerais de funções de um tensor qualquer $\underset{\sim}{T}$ podem ser convenientemente estudadas reduzindo esse argumento à forma canônica. Se o argumento é um tensor simétrico $\underset{\sim}{S}$, a forma canônica é a forma diagonal. Vamos mostrar que o valor da função isotrópica,

$$\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{S}), \tag{8.2.1}$$

também é um tensor diagonal.

Sendo (8.2.1) uma função isotrópica, temos

$$\underset{\sim}{H}^* = \underset{\sim}{Q}\, \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{S})\, \underset{\sim}{Q}^T = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{Q}\, \underset{\sim}{S}\, \underset{\sim}{Q}^T) = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{S}^*), \tag{8.2.2}$$

onde, de acordo com a decomposição espectral (7.1.3),

$$\underset{\sim}{S}^* = \sum_{i=1}^{3} S_i \, \underset{\sim}{n}_i^* \otimes \underset{\sim}{n}_i^* \, . \tag{8.2.3}$$

Então, temos

$$H^* = F\Big(\sum_{i=1}^{3} S_i \, n_i^* \otimes n_i^*\Big) = \sum_{i=1}^{3} f(S_i) \, n_i^* \otimes n_i^* \, , \tag{8.2.4}$$

onde, de acordo com (6.4.4), as funções escalares componentes $f(S_i)$ são os autovalores da função tensorial correspondente $\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{S}^*)$. Os autovalores reais S_i de $\underset{\sim}{S}^*$ e consequentemente, os autovalores $f(S_i)$ de $\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{S}^*)$, podem ser iguais (dois ou três) ou diferentes.

Matricialmente, (8.2.4) é expresso por

$$(8.2.5)\quad [H^*] = [H]' = \sum_{i=1}^{3} f(S_i)[n_i^* \otimes n_j^*] = \begin{bmatrix} f(S_1) & 0 & 0 \\ 0 & f(S_2) & 0 \\ 0 & 0 & f(S_3) \end{bmatrix},$$

onde $[H]'$ tem componentes

$$(8.2.6)\quad H'_{ij} = \underset{\sim}{H}^* \cdot \underset{\sim}{n}_i^* \otimes \underset{\sim}{n}_j^* = \underset{\sim}{H} \cdot \underset{\sim}{n}_i \otimes \underset{\sim}{n}_j = H_i\, \delta_{ij} \quad \text{(não soma)}.$$

Concluimos que se S_1, S_2 e S_3 são os autovalores de um tensor simétrico $\underset{\sim}{S}$ e $\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{S})$ é uma função isotrópica, o valor $\underset{\sim}{H}$ é um tensor simétrico cujos autovalores são $f(S_1)$, $f(S_2)$ e $f(S_3)$. Então, os tensores simétricos $\underset{\sim}{S}$ e $\underset{\sim}{H}$ têm os mesmos autoversores $\underset{\sim}{n}_i$ e dizemos que ambos são simultaneamente diagonalizados pelo tensor ortogonal $\underset{\sim}{Q}$.

8.3 - Funções tensoriais analíticas.

Se $f(z)$ é uma função analítica regular na vizinhança de $z = 0$, temos a expansão em série de potências,

$$(8.3.1)\quad f(z) = k_o + k_1 z + k_2 z^2 + \ldots + k_i z^i + \ldots .$$

Para um tensor $\underset{\sim}{T}$ definimos a série associada

$$(8.3.2) \qquad \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T}) = k_o \underset{\sim}{1} + k_1 \underset{\sim}{T} + k_2 \underset{\sim}{T}^2 + \ldots + k_i \underset{\sim}{T}^i + \ldots ,$$

que converge para todos os tensores cujos autovalores situam-se no círculo de convergência da série (8.3.1).

Por exemplo, o primeiro membro da equação

$$(8.3.3) \qquad \underset{\sim}{1} + \underset{\sim}{T} + \underset{\sim}{T}^2 + \ldots + \underset{\sim}{T}^i + \ldots = (\underset{\sim}{1}-\underset{\sim}{T})^{-1}$$

é uma série geométrica convergente para todos os tensores cujos autovalores têm valor absoluto menor do que um. A soma dessa série é $(1-\underset{\sim}{T})^{-1}$, de acordo com a expressão escalar

$$(8.3.4) \qquad 1 + x + x^2 + \ldots + x^i + \ldots = (1-x)^{-1}.$$

Um outro exemplo de função tensorial analítica é a fórmula do binômio,

$$(8.3.5) \qquad (\underset{\sim}{1}+\underset{\sim}{T})^m = \underset{\sim}{1} + \frac{m}{1}\underset{\sim}{T} + \frac{m(m-1)}{2!}\underset{\sim}{T}^2 + \ldots ,$$

que é válida para m natural, fracionário ou negativo, desde que os módulos dos autovalores de $\underset{\sim}{T}$ sejam menores do que um.

A função exponencial,

$$(8.3.6) \qquad H = e^{\underset{\sim}{T}} = 1 + \frac{\underset{\sim}{T}}{1!} + \frac{\underset{\sim}{T}^2}{2!} + \ldots$$

é uma função tensorial analítica que converge para todo valor finito dos componentes de $\underset{\sim}{T}$. Essa função possue várias propriedades análogas às da função escalar associada

$$(8.3.7) \qquad e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots .$$

Por exemplo,

$$(8.3.8) \qquad H^2 = e^{\underset{\sim}{T}}\, e^{\underset{\sim}{T}} = e^{2\underset{\sim}{T}}$$

e, de um modo geral,

(8.3.9) $$\underset{\sim}{H}^{m} = e^{m\underset{\sim}{T}} .$$

Se $\underset{\sim}{H}^{-1}$ é definido por $\underset{\sim}{H}\,\underset{\sim}{H}^{-1} = \underset{\sim}{1}$, então,

(8.3.10) $$\underset{\sim}{H}^{-1} = e^{-\underset{\sim}{T}},$$

e (8.3.9) pode ser estendido às potências negativas. A propriedade

(8.3.11) $$e^{\underset{\sim}{T}_1}\, e^{\underset{\sim}{T}_2} = e^{\underset{\sim}{T}_1+\underset{\sim}{T}_2} ,$$

correspondente a

(8.3.12) $$e^{z_1}\, e^{z_2} = e^{z_1+z_2},$$

só é válida, entretanto, se os tensores $\underset{\sim}{T}_1$ e $\underset{\sim}{T}_2$ comutarem entre si, i.e., se

(8.3.13) $$\underset{\sim}{T}_1\,\underset{\sim}{T}_2 = \underset{\sim}{T}_2\,\underset{\sim}{T}_1 .$$

Se na séire (8.3.1), os coeficientes k_i são funções dos invariantes S_1, S_2 e S_3 de um tensor simétrico $\underset{\sim}{S}$, i.e., se

(8.3.14) $$f(z) = f(S_1,S_2,S_3,z),$$

então $\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{S})$ dados por (8.3.2) pode ser reduzido à forma diagonal mais geral do que (8.2.5),

(8.3.15) $$[H]^{\natural} = \begin{bmatrix} f(S_1,S_2,S_3,S_1) & 0 & 0 \\ & f(S_1,S_2,S_3,S_2) & \\ 0 & 0 & f(S_1,S_2,S_3,S_3) \end{bmatrix}.$$

Se S_1, S_2 e S_3 são distintos, as funções

(8.3.16) $$f(S_1,S_2,S_3,S) = \frac{(S-S_2)(S-S_3)}{(S_1-S_2)(S_1-S_3)}\,\phi(S_1,S_2,S_3) +$$

$$+\frac{(S-S_1)(S-S_3)}{(S_2-S_1)(S_2-S_3)}\psi(S_1,S_2,S_3)+\frac{(S-S_1)(S-S_2)}{(S_3-S_1)(S_3-S_2)}\chi(S_1,S_2,S_3)\ ,$$

onde ϕ, ψ e χ podem ser funções arbitrárias de seus argumentos, obedecem as relações

$$(8.3.17)\qquad \begin{cases} f(S_1,S_2,S_3,S_1) = \phi(S_1,S_2,S_3), \\ f(S_1,S_2,S_3,S_2) = \psi(S_1,S_2,S_3), \\ f(S_1,S_2,S_3,S_3) = \chi(S_1,S_2,S_3). \end{cases}$$

Em particular, dois tensores simétricos semelhantes expressos na forma diagonal em relação a mesma base, podem ser representados em função um do outro por meio de uma fórmula do tipo (8.3.16). Desse modo, funções tensoriais isotrópicas de tensores simétricos ficam reduzidas a funções entre as raizes da equação característica, funções essas que são definidas pela função (8.3.14).

8.4 - Representação de $\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T})$.

Vamos mostrar, usando a equação de Hamilton-Cayley, (6.2.12), que a função isotrópica $\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T})$ pode ser representada por um polinômio do segundo grau em $\underset{\sim}{T}$. Se $\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T})$ é um polinômio do grau $m > 2$, essa representação é obtida diretamente de (6.2.12) que permite exprimir as potências inteiras de $\underset{\sim}{T}$ como combinações lineares de $\underset{\sim}{1}$, $\underset{\sim}{T}$ e $\underset{\sim}{T}^2$ cujos coeficientes são polinômios escalares nos invariantes principais de $\underset{\sim}{T}$. Por exemplo,

(8.4.1) $$\underset{\sim}{T}^3 = I_1 \underset{\sim}{T}^2 - I_2 \underset{\sim}{T} + I_3 \underset{\sim}{1}$$

(8.4.2) $$\underset{\sim}{T}^4 = I_1 \underset{\sim}{T}^3 - I_2 \underset{\sim}{T}^2 + I_3 \underset{\sim}{T} =$$
$$= (I_1^2 - I_2)\underset{\sim}{T}^2 + (I_3 - I_1 I_2)\underset{\sim}{T} + I_1 I_3 \underset{\sim}{1}.$$

Consideremos o caso em que o argumento $\underset{\sim}{T}$ da função isotrópica $\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T})$, associada a função escalar $f(z)$, tem raizes características T_1, T_2 e T_3 distintas. Seja o polinômio quadrático

(8.4.3) $$p(z) = k_o + k_1 z + k_2 z^2,$$

que, nos pontos $z_i = T_i$ tem os valores $p(T_i) = f(T_i)$. As raizes T_i sendo distintos, determinam univocamente os coeficientes k_o, k_1 e k_2 de (8.4.3). A diferença $f(z) - p(z)$ torna-se então identicamente nula nos pontos T_1, T_2 e T_3. Se nesses pontos a função $f(T)$ é regular, temos

(8.4.4) $$f(T) = p(T) + (T_1 - T)(T_2 - T)(T_3 - T)\,\psi(T),$$

onde a função $\psi(T)$ tem valores finitos nos pontos T_i e onde, de acordo com $(6.2.5)_2$,

(8.4.5) $$(T_1 - T)(T_2 - T)(T_3 - T) = \Delta(T),$$

é o polinômio característico de $\underset{\sim}{T}$. Substituindo (8.4.5) em (8.4.4), temos

(8.4.6) $$f(T) = p(T) + \Delta(T)\,\psi(T).$$

Substituindo nessa expressão o parâmetro T pelo tensor $\underset{\sim}{T}$ e levando em conta que de acordo com o teorema de Hamilton-Cayley, $\Delta(\underset{\sim}{T}) = \underset{\sim}{0}$, resulta:

$$\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T}) = \underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{T}), \tag{8.4.7}$$

onde $\underset{\sim}{P}(\underset{\sim}{T})$ é a função tensorial correspondente a $p(T)$. Então, a função isotrópica $\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T})$ é representada pelo polinômio do segundo grau em $\underset{\sim}{T}$

$$\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T}) = k_o \underset{\sim}{1} + k_1 \underset{\sim}{T} + k_2 \underset{\sim}{T}^2 = k_i \underset{\sim}{T}^i, \tag{8.4.8}$$

onde os coeficientes k_o, k_1 e k_2 são funções escalares dos invariantes de $\underset{\sim}{T}$.

Se $\underset{\sim}{T}$ é inversível, uma outra forma de representação da função isotrópica é

$$\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T}) = b_o \underset{\sim}{1} + b_1 \underset{\sim}{T} + b_{-1} \underset{\sim}{T}^{-1} = b_j \underset{\sim}{T}^j, \tag{8.4.9}$$

obtida de (8.4.8) substituindo $\underset{\sim}{T}^2$ pelo resultado da multiplicação de (8.4.1) por $\underset{\sim}{T}^{-1}$. Em termos dos coeficientes k_i os coeficientes b_j são dados por

$$\begin{cases} b_o = k_o - I_2 k_2, \\ b_1 = k_1 + I_1 k_2, \\ b_{-1} = I_3 k_2. \end{cases} \tag{8.4.10}$$

O polinômio quadrático (8.4.3) pode ser expresso pela <u>fórmula de interpolação de Lagrange</u>

$$p(z) = \frac{(z-T_2)(z-T_3)}{(T_1-T_2)(T_1-T_3)} f(T_1) + \tag{8.4.11}$$

$$+ \frac{(z-T_1)(z-T_3)}{(T_2-T_1)(T_2-T_3)} f(T_2) + \frac{(z-T_1)(z-T_2)}{(T_3-T_1)(T_3-T_2)} f(T_3),$$

a qual corresponde a função

$$H = \frac{(\underset{\sim}{T}-T_2\underset{\sim}{1})(\underset{\sim}{T}-T_3\underset{\sim}{1})}{(T_1-T_2)(T_1-T_3)} f(T_1) + \tag{8.4.12}$$

$$+\frac{(\underset{\sim}{T}-T_1\underset{\sim}{1})(\underset{\sim}{T}-T_3\underset{\sim}{1})}{(T_2-T_1)(T_2-T_3)}f(T_2)+\frac{(\underset{\sim}{T}-T_1\underset{\sim}{1})(\underset{\sim}{T}-T_2\underset{\sim}{1})}{(T_3-T_1)(T_3-T_2)}f(T_3),$$

chamada de fórmula de Lagrange-Sylvester e que é outra forma de representação da função isotrópica $\underset{\sim}{H}=\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T})$ por polinômio do segundo grau.

As representações (8.4.8) e (8.4.9) são válidas para o caso do tensor $\underset{\sim}{T}$ com raizes características repetidas.

A partir de (8.4.8) podemos concluir que se $\underset{\sim}{T}$ tem raizes iguais, $\underset{\sim}{H}$ também as tem, que se $\underset{\sim}{T}$ é esférico, $\underset{\sim}{H}$ também é mas que se $\underset{\sim}{T}$ é antissimétrico, H não é, em geral, antissimétrico.

8.5 - Desdobramento tríplice de $\underset{\sim}{H}=\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T})$.

A partir da representação (8.4.8), temos

$$\begin{aligned}(8.5.1)\qquad &\underset{\sim}{E}^H+\underset{\sim}{D}^H+\underset{\sim}{W}^H=k_o\,\underset{\sim}{1}+k_1(\underset{\sim}{E}^T+\underset{\sim}{D}^T+\underset{\sim}{W}^T)+\\&+k_2((\underset{\sim}{E}^T)^2+\underset{\sim}{E}^T\underset{\sim}{D}^T+\underset{\sim}{E}^T\underset{\sim}{W}^T+\underset{\sim}{D}^T\underset{\sim}{E}^T+(\underset{\sim}{D}^T)^2+\\&+\underset{\sim}{D}^T\underset{\sim}{W}^T+\underset{\sim}{W}^T\underset{\sim}{E}^T+\underset{\sim}{W}^T\underset{\sim}{D}^T+(\underset{\sim}{W}^T)^2)=\\&=k_o\,\underset{\sim}{1}+k_1\,\underset{\sim}{E}^T+k_1\,\underset{\sim}{D}^T+k_1\,\underset{\sim}{W}^T+k_2\,(\underset{\sim}{E}^T)^2+\\&+k_2\,(\underset{\sim}{D}^T)^2+k_2\,(\underset{\sim}{W}^T)^2+2\,k_2\,\underset{\sim}{E}^T\underset{\sim}{D}^T+\\&+2\,k_2\,\underset{\sim}{E}^T\underset{\sim}{W}^T+\underset{\sim}{D}^T\underset{\sim}{W}^T+\underset{\sim}{W}^T\underset{\sim}{D}^T.\end{aligned}$$

Diretamente de (8.4.8) podemos tirar a expressão da parcela esférica

$$(8.5.2)\qquad \underset{\sim}{E}^H=\frac{\underset{\sim}{1}}{3}\,\mathrm{tr}\,\underset{\sim}{H}=(k_o+\frac{1}{3}k_1\,I_1^T+\frac{1}{3}k_2((I_1^T)^2-2\,I_2^T))\underset{\sim}{1}.$$

Em (8.5.1) podemos identificar a parcela antissimétrica

$$\underset{\sim}{W}^{H} = k_1 \underset{\sim}{W}^{T} + k_2(2\,\underset{\sim}{E}^{T}\underset{\sim}{W}^{T} + \underset{\sim}{D}^{T}\underset{\sim}{W}^{T} + \underset{\sim}{W}^{T}\underset{\sim}{D}^{T}) \tag{8.5.3}$$

pois, $\underset{\sim}{D}$ é simétrico e, em geral,

$$(\underset{\sim\sim}{S}\underset{\sim}{W} + \underset{\sim}{W}\underset{\sim\sim}{S})^{T} = -(\underset{\sim\sim}{S}\underset{\sim}{W} + \underset{\sim}{W}\underset{\sim\sim}{S}) \ . \tag{8.5.4}$$

Então, por diferença, teremos de (8.5.1) a parcela deviante,

(8.5.5):

$$\underset{\sim}{D}^{H} = k_1\underset{\sim}{D}^{T} + k_2(2\,\underset{\sim}{E}^{T}\underset{\sim}{D}^{T} + (\underset{\sim}{E}^{T})^2 + (\underset{\sim}{D}^{T})^2 + (\underset{\sim}{W}^{T})^2 - \tfrac{1}{3}((I_1^{T})^2 - 2I_2^{T})\underset{\sim}{1}) .$$

Os invariantes principais de $\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T})$ podem ser obtidos em termos dos invariantes principais de $\underset{\sim}{T}$ a partir da representação (8.4.8). Por exemplo,

(8.5.6):

$$I_1^{H} = \operatorname{tr} \underset{\sim}{H} = 3\,k_o + k_1\,I_1^{T} + k_2\,((I_1^{T})^2 - 2\,I_2^{T}) \ .$$

8.6 - Efeito Poynting.

A não-linearidade da representação (8.4.8) de uma função tensorial isotrópica dá lugar ao chamado efeito Poynting: Podem ser nulos os componentes diagonais do tensor $\underset{\sim}{T}$ e do seu deviante $\underset{\sim}{D}^{T}$ mas não serem nulos os componentes diagonais do tensor $\underset{\sim}{D}^{H}$, deviante de $\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T})$. De fato, nesse caso, temos

$$(8.6.1) \qquad \operatorname{tr} \underset{\sim}{T} = 0, \quad \underset{\sim}{E}^{T} = 0, \quad \underset{\sim}{D}^{T} = \underset{\sim}{S}^{T}, \quad I_2^{T} = -\operatorname{tr} \underset{\sim}{T}^2/2,$$

e de (8.5.5) resulta

$$(8.6.2) \qquad \underset{\sim}{D}^{H} = k_1 \underset{\sim}{D}^{T} + k_2(\underset{\sim}{D}^{T})^2 + k_2(\underset{\sim}{W}^{T})^2 - (\tfrac{1}{3} k_2 \operatorname{tr} \underset{\sim}{T}^2)\underset{\sim}{1}.$$

Além disso, de (8.5.2), (8.5.3) e (8.5.6), temos, respectivamente,

$$(8.6.3) \qquad \underset{\sim}{E}^{H} = (k_o + \tfrac{1}{3} k_2 \operatorname{tr} \underset{\sim}{T}^2)\underset{\sim}{1},$$

$$(8.6.4) \qquad \underset{\sim}{W}^{H} = k_1 \underset{\sim}{W}^{T} + k_2(\underset{\sim}{D}^{T}\underset{\sim}{W}^{T} + \underset{\sim}{W}^{T}\underset{\sim}{D}^{T}),$$

$$(8.6.5) \qquad I_1^{H} = 3 k_o + k_2 \operatorname{tr} \underset{\sim}{T}^2.$$

Esse efeito ocorre também quando o tensor $\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{S}$ é simétrico, i.e., quando $\underset{\sim}{W}^{T} = 0$. Nesse caso,

$$(8.6.6) \qquad \underset{\sim}{D}^{H} = k_1 \underset{\sim}{D}^{T} + k_2(\underset{\sim}{D}^{T})^2 - (\tfrac{1}{3} k_2 \operatorname{tr} \underset{\sim}{T}^2)1,$$

$$(8.6.7) \qquad \underset{\sim}{W}^{H} = \underset{\sim}{0}.$$

Por exemplo,

$$(8.6.8)\qquad [\underset{\sim}{T}] = [\underset{\sim}{S}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\underset{\sim}{S}^2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$(8.6.9)\qquad [\underset{\sim}{D}^{H}] = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_2 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\,k_2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2\,k_2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2\,k_2/3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} k_2/3 & k_1 & 0 \\ k_1 & k_2/3 & 0 \\ 0 & 0 & -2\,k_2/3 \end{bmatrix}.$$

8.7 - Representação quase-linear de função tensorial isotrópica.

Se em (8.4.8) $k_2 = 0$, o que equivale em (8.4.12) a

$$(8.7.1)\qquad \frac{f(T_1)}{(T_1-T_2)(T_1-T_3)} + \frac{f(T_2)}{(T_2-T_1)(T_2-T_3)} + \frac{f(T_3)}{(T_3-T_1)(T_3-T_2)} = 0$$

então, a representação da função $\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T})$ é expressa por

$$(8.7.2)\qquad \underset{\sim}{H} = k_o\,\underset{\sim}{1} + k_1\,\underset{\sim}{T}.$$

Essa é uma relação quase-linear entre $\underset{\sim}{H}$ e $\underset{\sim}{T}$ porque os coeficientes k_o e k_1 podem ser funções arbitrárias dos invariantes escalares T_1, T_2 e T_3 ou I_1, I_2 e I_3 que, por sua vez, são funções dos componentes de $\underset{\sim}{T}$. Nesse caso, temos que

$$(8.7.3)\qquad I_1^{\underset{\sim}{H}} = 3\,k_o + k_1\,I_1^{\underset{\sim}{T}},$$

$$(8.7.4)\qquad \underset{\sim}{E}^{H} = (k_o + \tfrac{1}{3}\,k_1\,I_1^{\underset{\sim}{T}})\,\underset{\sim}{1},$$

(8.7.5) $$\underset{\sim}{D}^{H} = k_1 \underset{\sim}{D}^{T},$$

(8.7.6) $$\underset{\sim}{W}^{H} = k_1 \underset{\sim}{W}^{T}.$$

Vemos que os deviantes $\underset{\sim}{D}^{H}$ e $\underset{\sim}{D}^{T}$ são proporcionais, embora o coeficiente de proporcionalidade k_1 seja, em geral variável. Essa proporcionalidade que equivale a uma igualdade dos parâmetros de Lode, de $\underset{\sim}{D}^{H}$ e $\underset{\sim}{D}^{T}$, é condição necessária e suficiente para a existência da relação quase-linear (8.7.2).

A função quase-linear acarreta o efeito Kelvin segundo o qual, de acordo com (8.7.4), podemos ter o tensor esférico $\underset{\sim}{E}^{T} = \underset{\sim}{0}$ $(I_1^{\underset{\sim}{T}} = 0)$ mas, $\underset{\sim}{E}^{H} = k_o \underset{\sim}{1} \neq \underset{\sim}{0}$, por causa da dependência não-linear de k_o nos componentes do tensor $\underset{\sim}{T}$.

8.8 - Representação linear e homogênea de função tensorial isotrópica.

Para que a função isotrópica $\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T})$ seja representada por uma equação linear e homogênea é necessário e suficiente que em (8.4.8) tenhamos

(8.8.1) $$k_o = c \ \mathrm{tr}\ \underset{\sim}{T}, \quad c = \text{constante},$$
$$k_1 = \text{constante}, \quad k_2 = 0.$$

Nesse caso,

(8.8.2) $$\underset{\sim}{H} = c(\mathrm{tr}\ \underset{\sim}{T})\underset{\sim}{1} + k_1 \underset{\sim}{T},$$

e .

(8.8.3) $$I_1^{\underset{\sim}{H}} = \operatorname{tr} \underset{\sim}{H} = (3c + k_1)\operatorname{tr} \underset{\sim}{T},$$

(8.8.4) $$\underset{\sim}{E}^{\underset{\sim}{H}} = (c + \frac{1}{3} k_1)\operatorname{tr} \underset{\sim}{T},$$

(8.8.5) $$\underset{\sim}{D}^{\underset{\sim}{H}}/\underset{\sim}{D}^{\underset{\sim}{T}} = k_1 = \text{constante},$$

i.e., os deviantes de $\underset{\sim}{H}$ e $\underset{\sim}{T}$ são proporcionais e o coeficiente de proporcionalidade é agora constante.

8.9 - Relação entre tensor ortogonal próprio e tensor antissimétrico.

Como exemplo de função isotrópica consideremos a relação

(8.9.1) $$\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{W}),$$

onde $\underset{\sim}{Q} \in \mathcal{O}^+$ e $\underset{\sim}{W}$ é um tensor antissimétrico arbitrário cujo vetor axial $\underset{\sim}{w} = \operatorname{vet} \underset{\sim}{W}$, chamado de vetor rotação, se apoia no eixo da rotação $\underset{\sim}{Q}$ e tem como módulo o ângulo da rotação θ. Em (6.9.6) mostramos que o vetor $\underset{\sim}{w}^{\underset{\sim}{Q}}$ da parcela antissimétrica de $\underset{\sim}{Q}$, $\underset{\sim}{W}^{\underset{\sim}{Q}}$, apoia-se no eixo da rotação $\underset{\sim}{Q}$ e tem $\operatorname{sen} \theta$ como módulo.

Vamos demonstrar que a função (8.9.1) é representada por

(8.9.2) $$\underset{\sim}{Q} = e^{\underset{\sim}{W}}.$$

Inicialmente, podemos verificar que

$$\underset{\sim}{Q}^T = e^{-\underset{\sim}{W}} = \underset{\sim}{Q}^{-1},$$

i.e., se $\underset{\sim}{W}$ é antissimétrico $\underset{\sim}{Q}$ é ortogonal e, vice-versa.

Adotemos como base a que tem o eixo $(\underset{\sim}{e}_3)_{\underset{\sim}{0}}$ coincidente com o da rotação $\underset{\sim}{Q}$, de apoio de $\underset{\sim}{w}$. Em relação a essa base $\underset{\sim}{Q}$ é representado por (4.3.1) i.e., por

$$(8.9.3) \qquad [\underset{\sim}{Q}] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e $\underset{\sim}{W}$ pela matriz (5.3.4) que no caso é

$$(8.9.4) \qquad [\underset{\sim}{W}] = \begin{bmatrix} 0 & -\theta & 0 \\ \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

onde $\theta = \|\underset{\sim}{w}\|$ é o ângulo da rotação descrita por $\underset{\sim}{Q}$. De acordo com (8.3.6),

$$(8.9.5) \qquad e^{\underset{\sim}{W}} = 1 + \underset{\sim}{W} + \frac{1}{2!}\underset{\sim}{W}^2 + \ldots ,$$

portanto, substituindo (8.9.4) nessa equação representada matricialmente, temos

$$(8.9.6) \qquad e^{[\underset{\sim}{W}]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\theta & 0 \\ \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\theta^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\theta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \ldots$$

Por outro lado,

$$(8.9.7) \qquad \operatorname{sen}\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots ,$$

$$(8.9.8) \qquad \cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \ldots ,$$

portanto, as séries dos elementos de $e^{[\underset{\sim}{K}]}$ convergem para $[\underset{\sim}{Q}]$ expresso por (8.9.3) e, fica demonstrada a representação (8.9.2).

Vejamos uma outra demonstração baseada na equação (8.4.12) de Lagrange-Sylvester. O segundo invariante principal de $\underset{\sim}{W}$ é dado por $(7.7.4)_2$, portanto, nesse caso,

$$I_2^{\underset{\sim}{W}} = \theta^2. \tag{8.9.9}$$

Então, a equação característica de $\underset{\sim}{W}$ é expressa por

$$W^3 + \theta^2 W = 0 \tag{8.9.10}$$

e as raizes características são

$$\begin{cases} W_1 = i\theta, \\ W_2 = -i\theta, \\ W_3 = 0. \end{cases} \tag{8.9.11}$$

De acordo com (8.4.12), temos

$$Q = F(W) = \frac{(\underset{\sim}{W}+i\theta\ \underset{\sim}{1})\underset{\sim}{W}}{-2\ \theta^2}\, e^{i\theta} + \frac{(\underset{\sim}{W}-i\theta\ \underset{\sim}{1})\underset{\sim}{W}}{-2\ \theta^2}\, e^{-i\theta} + \frac{(\underset{\sim}{W}-i\theta\ \underset{\sim}{1})(\underset{\sim}{W}+i\theta\ \underset{\sim}{1})}{\theta^2} =$$

$$= \frac{(\underset{\sim}{W}+i\theta\ \underset{\sim}{1})\underset{\sim}{W}}{-2\ \theta^2}\,(\cos\theta + i\,\operatorname{sen}\theta) + \frac{(\underset{\sim}{W}-i\theta\ \underset{\sim}{1})\underset{\sim}{W}}{-2\ \theta^2}\,(\cos\theta - i\,\operatorname{sen}\theta) + \frac{\underset{\sim}{W}^2+\theta^2\underset{\sim}{1}}{\theta^2}.$$

Então,

$$e^{\underset{\sim}{W}} = \underset{\sim}{1} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\,\underset{\sim}{W} + \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\,\underset{\sim}{W}^2 = \tag{8.9.12}$$

$$= 1 + \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\,\underset{\sim}{W} + \frac{2\operatorname{sen}^2(\theta/2)}{\theta^2}\,\underset{\sim}{W}^2.$$

Substituindo $\underset{\sim}{W}$ por sua matriz (8.9.4) obtemos (8.9.3) e fica mais uma vez demonstrada a relação (8.9.2).

A representação da função inversa $\underset{\sim}{W} = \underset{\sim}{F}^{-1}(\underset{\sim}{Q})$ pode ser

obtida do desenvolvimento em série

$$(8.9.13) \qquad \underset{\sim}{W} = \ell n\, \underset{\sim}{Q} = \ell n(1+(\underset{\sim}{1}-\underset{\sim}{Q})) = \frac{\underset{\sim}{1}-\underset{\sim}{Q}}{1!} - \frac{(\underset{\sim}{1}-\underset{\sim}{Q})^2}{2!} + \ldots .$$

Uma outra representação da função inversa é dada pela equação de Langrange-Sylvester levando em conta que as raizes caraoterísticas de $\underset{\sim}{Q}$ são dadas por (6.7.6). Então, de (8.4.12) temos

$$(8.9.14) \qquad \underset{\sim}{W} = \frac{\theta}{2\ \text{sen}\ \theta}\ (\underset{\sim}{Q}-\underset{\sim}{1})((1+2\ \cos\theta)\underset{\sim}{1} - \underset{\sim}{Q}).$$

O autoversor de $\underset{\sim}{W} = e^{\underset{\sim}{Q}}$ correspondente ao autovalor $W = 0$ gera o eixo de $\underset{\sim}{W}$ que coincide com o eixo da rotação $\underset{\sim}{Q}$ gerado pelo autoversor de $\underset{\sim}{Q}$ correspondente ao autovalor $Q = +1$.

8,10 - Existênoia de função tensorial isotrópica.

Como um exemplo, consideremos os casos em que $\underset{\sim}{T}^T$ pode ser considerado como função isotrópica de T. Se $\underset{\sim}{T}$ é simétrico, antissimétrico ou ortogonal, temos, respectivamente,

$$(8.10.1) \qquad \underset{\sim}{T}^T = \underset{\sim}{T},$$

$$(8.10.2) \qquad \underset{\sim}{T}^T = -\underset{\sim}{T},$$

$$(8.10.3) \qquad \underset{\sim}{T}^T = \underset{\sim}{T}^{-1},$$

i.e., nesses casos,

$$(8.10.4) \qquad \underset{\sim}{T}^T = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T}),$$

e a função é isotrópica.

Consideremos agora a condição necessária e suficiente para que (8.10.4) seja válido quando, em geral, $\underset{\sim}{T}$ é assimétrico e não é ortogonal. Como condição necessária temos que se (8.10.4) é válido, então

$$\underset{\sim}{T}^T \underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{T} \underset{\sim}{T}^T, \tag{8.10.5}$$

i.e., o tensor $\underset{\sim}{T}$ comuta com o seu transposto (caso em que $\underset{\sim}{T}$ é chamado de tensor normal). Uma condição necessária equivalente a (8.10.5) é dada por

$$\underset{\sim}{W}\,\underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{S}\,\underset{\sim}{W}, \tag{8.10.6}$$

onde $\underset{\sim}{W}$ e $\underset{\sim}{S}$ são respectivamente as parcelas antissimétrica e simétrica do tensor $\underset{\sim}{T}$. Essa expressão é obtida de (8.10.5) desdobrando $\underset{\sim}{T}$ nas suas parcelas $\underset{\sim}{S}$ e $\underset{\sim}{W}$.

Mostremos que (8.10.5) ou (8.10.6) exprimem também uma condição suficiente para a existência de (8.10.4). Para isso, consideremos a redução de $\underset{\sim}{S}$ à forma diagonal por um tensor ortogonal $\underset{\sim}{Q}$ e apliquemos essa transformação também à parcela antissimétrica $\underset{\sim}{W}$ em (8.10.6). Usando a representação matricial, temos

$$[\underset{\sim}{Q}^T][\underset{\sim}{W}][\underset{\sim}{Q}][\underset{\sim}{Q}^T][\underset{\sim}{S}][\underset{\sim}{Q}] = [\underset{\sim}{Q}^T][\underset{\sim}{S}][\underset{\sim}{Q}][\underset{\sim}{Q}^T][\underset{\sim}{W}][\underset{\sim}{Q}],$$

ou,

$$[\underset{\sim}{W}]'[\underset{\sim}{S}]' = [\underset{\sim}{S}]'[\underset{\sim}{W}]'.$$

Em componentes, temos

$$W'_{ij}\, S'_{jk} = S'_{ij}\, W'_{jk},$$

onde $S'_{ij} = S_i\, \delta_{ij}$ (não soma), portanto,

$$W'_{ij}\, S_k\, \delta_{jk} = S_i\, \delta_{ij}\, W'_{jk} \quad \text{(não soma em } i \text{ e } k\text{)},$$

ou,

$$W'_{ik}\, S_k = S_i\, W'_{ik} \quad \text{(não soma)},$$

e finalmente,

$$W'_{ik}\,(S_k - S_i) = 0 \quad \text{(não soma)}. \tag{8.10.7}$$

Com esse resultado podemos concluir que se queremos satisfazer a condição $\underset{\sim}{W} \neq \underset{\sim}{0}$, então os autovalores de $\underset{\sim}{S}$ não podem ser todos diferentes. Então, o tensor $\underset{\sim}{T}$ só pode ser normal quando dois ou três autovalores de sua parcela simétrica forem iguais.

No caso de três autovalores iguais, o tensor $\underset{\sim}{S}$ é escalar e

$$\underset{\sim}{T} = S_1\, \underset{\sim}{1} + \underset{\sim}{W},$$

$$\underset{\sim}{T}^T = S_1\, \underset{\sim}{1} - \underset{\sim}{W},$$

resultando a representação

$$\underset{\sim}{T}^T = -\underset{\sim}{T} + 2\, S_1\, \underset{\sim}{1} \tag{8.10.8}$$

que é uma função isotrópica.

No caso de duas raizes iguais por exemplo, $S_1 = S_2$, as equações (8.10.7) admitem a solução

$$W'_{12} = -W'_{21} = W, \qquad W'_{13} = W'_{23} = 0$$

onde de acordo com $(8.7.4)_2$,

$$w^2 = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = W_{12}^2 + W_{13}^2 + W_{23}^2 = I_2^{\underset{\sim}{W}}$$

é o invariante principal não-nulo do tensor $\underset{\sim}{W}$. Resulta que o tensor $\underset{\sim}{Q}$ reduz as matrizes de $\underset{\sim}{T}$ e $\underset{\sim}{T}^T$ as formas

$$(8.10.9) \qquad [\underset{\sim}{T}] = [\underset{\sim}{S}] + [\underset{\sim}{W}] = \begin{bmatrix} S_1 & w & 0 \\ -w & S_1 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 \end{bmatrix},$$

$$(8.10.10) \qquad [\underset{\sim}{T}^T] = [\underset{\sim}{S}] - [\underset{\sim}{W}] = \begin{bmatrix} S_1 & -w & 0 \\ w & S_1 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 \end{bmatrix}.$$

Se $S_1 = \cos\theta$, $w = -\operatorname{sen}\theta$ e $S_3 = 1$, o tensor $\underset{\sim}{T}$ é ortogonal.

O tensor $\underset{\sim}{T}$ é representado pela matriz (8.10.9) porque o eixo principal de sua parcela simétrica $(\underset{\sim}{n}_3)_{\underset{\sim}{Q}}$ coincide com o eixo de apoio do vetor axial $\underset{\sim}{w} = \text{vet}\,\underset{\sim}{W}$ e, essa coincidência é sempre possível porque $\underset{\sim}{T}$ tem dois autovalores iguais $S_1 = S_2$ de sorte que os eixos principais ortogonais $(\underset{\sim}{n}_1)_{\underset{\sim}{Q}}$ e $(\underset{\sim}{n}_2)_{\underset{\sim}{Q}}$ têm direções arbitrárias no plano normal a $(\underset{\sim}{n}_3)_{\underset{\sim}{Q}}$. No caso de autovalores distintos da parcela $\underset{\sim}{S}$, a matriz de $\underset{\sim}{T}$ na base dos autoversores de $\underset{\sim}{S}$ é dada por (7.4.2).

Os invariantes principais de $\underset{\sim}{T}$ representado por (8.10.9) são

$$(8.10.11) \qquad \begin{cases} I_1 = 2\,S_1 + S_3 \\ I_2 = S_1^2 + w^2 + 2\,S_1\,S_3 \\ I_3 = S_3\,(S_1^2 + w^2), \end{cases}$$

e a equação característica de $\underset{\sim}{T}$ é expressa por

$$(8.10.12) \qquad \Delta(T) = -T^3 + (2\,S_1 + S_3)T^2 - (S_1^2 + w^2 + 2\,S_1 S_3)T + \\ + S_3(S_1^2 + w^2) = 0.$$

Com (8.10.9) e (8.10.10) chegamos finalmente a

(8.10.13):

$$T^T = \frac{2S_3(w^2+S_1(S_3-S_1))\mathbf{1} + (4S_1^2-w^2-(S_1+S_3)^2)\mathbf{T} + 2(S_3-S_1)\mathbf{T}^2}{(S_1-S_3)^2 + w^2}$$

que é um polinômio do segundo grau cujos coeficientes são funções dos invariantes de $\underset{\sim}{T}$. Essa equação é da forma (8.10.4) e demonstra que (8.10.5) ou (8.10.6) é condição suficiente para a existência de função isotrópica.

8.11 - Dependência linear de vetores.

No espaço de três dimensões, quaisquer quatro vetores $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{a}_1$, $\underset{\sim}{a}_2$ e $\underset{\sim}{a}_3$ são linearmente dependentes. Então, existe sempre a combinação linear nula

$$(8.11.1) \qquad k\,\underset{\sim}{a} + k_1\,\underset{\sim}{a}_1 + k_2\,\underset{\sim}{a}_2 + k_3\,\underset{\sim}{a}_3 = k\,\underset{\sim}{a} + \sum_{j=1}^{3} k_j\,\underset{\sim}{a}_j = \underset{\sim}{0},$$

onde os coeficientes escalares k, k_1, k_2 e k_3 não são todos nulos. Esses coeficientes, a menos da multiplicação por um número, são invariantes sob transformações de bases. Em componentes, temos,

$$(8.11.2) \qquad k\,a_k + \sum_{j=1}^{3} k_j\,a_{jk} = 0,$$

onde os números a_{jk} são os componentes $k = 1,2,3$ dos vetores $\underset{\sim}{a}_j$. Para que os vetores $\underset{\sim}{a}_1$, $\underset{\sim}{a}_2$ e $\underset{\sim}{a}_3$ sejam linearmente independentes é necessário e suficiente que

$$(8.11.3) \qquad \det[a_{jk}] \neq 0.$$

Obedecida essa condição, temos $k \neq 0$ e podemos sem perda de generalidade por $k = -1$ e representar o vetor $\underset{\sim}{a}$ como uma combinação linear

$$\underset{\sim}{a} = \sum_{j=1}^{3} k_j \underset{\sim}{a}_j, \tag{8.11.4}$$

ou, em componentes,

$$a_k = \sum_{j=1}^{3} k_j a_{jk} \quad (k=1,2,3). \tag{8.11.5}$$

Para vetores arbitrários $\underset{\sim}{a}$, $\underset{\sim}{a}_1$, $\underset{\sim}{a}_2$ e $\underset{\sim}{a}_3$, podemos determinar os invariantes escalares k_j $(j=1,2,3)$ em termos dos produtos internos

$$\omega_i = a_i \cdot a = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} a_k, \tag{8.11.6}$$

$$\omega_{ij} = a_i \cdot a_j = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} a_{jk} \quad (i,j = 1,2,3). \tag{8.11.7}$$

De fato, de (8.11.4) temos o sistema de três equações a três incógnitas

$$\omega_i = \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij} k_j, \tag{8.11.8}$$

que pela regra de Cramer fornece

$$k_j = \Delta_j / \det [\omega_{ij}] = \Delta_j / \Delta \tag{8.11.9}$$

onde Δ_j é o determinante da matriz $[\omega_{ij}]$ com a coluna j constituida dos números ω_i. Obedecida a condição (8.11.3) então, é válida a condição

$$\Delta = \det [\omega_{ij}] \neq 0. \tag{8.11.10}$$

Se o vetor $\underset{\sim}{a}$ é função dos vetores $\underset{\sim}{a}_1$, $\underset{\sim}{a}_2$ e $\underset{\sim}{a}_3$, os escalares ω_i podem ser considerados como funções de ω_{ij} e

nesse caso existem relações da forma

(8.11.11) $$k_i = f_i\ (\omega_{jk}), \qquad (i,j,k = 1,2,3).$$

8.12 - Dependência linear de tensores.

Relações análogas a dos vetores do espaço linear de três dimensões podem ser estabelecidas para os tensores que, podem ser considerados como vetores do espaço linear $R^3 \otimes R^3$ de nove dimensões. Então, dez tensores arbitrários são linearmente dependentes, i.e., existe a relação análoga a (8.11.1),

(8.12.1) $$k\underset{\sim}{H} + \sum_{j=1}^{9} k_j \underset{\sim}{T}_j = \underset{\sim}{0}$$

onde os coeficientes escalares k_j $(j=1,2,\ldots,9)$, invariantes sob transformações de bases, não são todos nulos. Em componentes (8.12.1) é expresso por

(8.12.2) $$k\, H_{pq} + \sum_{j=1}^{9} k_j\, T_{(j)pq} \qquad (p,q = 1,2,3),$$

onde os 81 números $T_{(j)pq}$ são os componentes dos tensores $\underset{\sim}{T}_{(j)}$ $(j=1,2,\ldots,9)$. Esses componentes podem ser considerados como elementos de uma matriz 9×9, $[T_{(j)pq}]$, na qual o índice j determina a linha e uma certa combinação dos índices p, q a coluna. Se os nove tensores $\underset{\sim}{T}_j$ são linearmente independentes,

(8.12.3) $$\det [T_{(j)pq}] \neq 0,$$

e consequentemente, $k \neq 0$. Pondo $k = -1$, temos a <u>representação</u>

(8.12.4) $$H = \sum_{j=1}^{9} k_j \underset{\sim}{T}_j ,$$

ou,

$$(8.12.5) \qquad H_{pq} = \sum_{j=1}^{9} k_j \, T_{(j)pq} \qquad (p,q = 1,2,3).$$

Para tensores arbitrários $\underset{\sim}{H}$, $\underset{\sim}{T}_j$ $(j=1,2,\ldots,9)$, podemos exprimir os coeficientes k_j em função dos produtos internos

$$(8.12.6) \quad \omega_i = \underset{\sim}{T}_i \cdot \underset{\sim}{H} = \mathrm{tr}\, \underset{\sim}{T}_i \underset{\sim}{H}^T = T_{(i)pq} \, H_{qp} \quad (i=1,2,\ldots,9)$$

$$(8.12.7) \quad \omega_{ij} = \underset{\sim}{T}_i \cdot \underset{\sim}{T}_j = \mathrm{tr}\, \underset{\sim}{T}_i \, \underset{\sim}{T}_j^T = T_{(i)pq} \, T_{(j)qp} \quad (j=1,2,\ldots,9)$$

que, são exemplos de <u>invariantes simultâneos</u>. Os números ω_{ij} podem ser considerados como elementos de uma matriz 9x9,

$$(8.12.8) \qquad [\omega_{ij}] = [T_{(i)pq}][T^T_{(j)pq}].$$

Se a condição (8.12.3) é obedecida, então

$$(8.12.9) \qquad \Delta = \det[\omega_{ij}] \neq 0.$$

Os coeficientes k_j $(j=1,2,\ldots,9)$ são então dados por (8.11.9) onde Δ_j é o determinante obtido de $\det[\omega_{ij}]$ com a coluna j substituida por ω_i.

Se o tensor $\underset{\sim}{H}$ é uma função tensorial dos tensores $\underset{\sim}{T}_j$, os invariantes escalares ω_i são funções dos invariantes escalares ω_i do sistema de tensores $\underset{\sim}{T}_j$.

A representação (8.12.4) é válida para dez tensores arbitrários, em geral assimétricos, e permanece válida quando $j < 9$, i.e., quando os tensores $\underset{\sim}{T}_j$ têm menos do que nove componentes independentes em cada matriz ou em diferentes matrizes. Por exemplo, se os tensores $\underset{\sim}{H}$ e $\underset{\sim}{T}_j$ são simétricos, o número

de componentes independentes em cada matriz, igual ao número de índices j, é seis e, se são todos deviantes, $j = 1,2,\ldots,5$.

Na representação (8.12.4), o tensor dependente $\underset{\sim}{H}$ pode ser função de um número arbitrário de tensores arbitrários $\underset{\sim}{A}_i$ $(i = 1,2,\ldots,m)$ linearmente independentes ou não. Por sua vez, os tensores linearmente independentes $\underset{\sim}{T}_j$ $(j = 1,2,\ldots,9)$ podem ser cada um deles uma função diferente de um número diferente, $1 \leq \ell \leq m$, dos tensores arbitrários $\underset{\sim}{A}_i$. Nesse caso, os invariantes escalares k_j serão funções dos invariantes desses tensores $\underset{\sim}{A}_i$.

Exemplo. Consideremos a possibilidade de representar um tensor simétrico $\underset{\sim}{H}$ que é função conhecida,

$$\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{S}), \tag{8.12.10}$$

de um tensor simétrico $\underset{\sim}{S}$, como uma combinação linear das funções simétricas de $\underset{\sim}{S}$

$$\underset{\sim}{T}_1 = \underset{\sim}{1}, \quad \underset{\sim}{T}_2 = \underset{\sim}{S}, \quad \underset{\sim}{T}_3 = \underset{\sim}{S}^2. \tag{8.12.11}$$

A representação existe quando essas funções de $\underset{\sim}{S}$ são linearmente independentes, i.e., quando a condição (8.12.3) é obedecida. Reduzindo o tensor $\underset{\sim}{S}$ a forma canônica, (8.12.3) é expressa por

$$\det [T'_{(j)pq}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_1^2 & S_2^2 & S_3^2 \end{vmatrix} = \tag{8.12.12}$$

$$= S_1^2 (S_3 - S_2) + S_2^2 (S_1 - S_3) + S_3^2 (S_2 - S_1) \neq 0$$

i.e., é preciso que os três autovalores de $\underset{\sim}{S}$ sejam diferentes

para que o tensor $\underset{\sim}{H}$ seja representado pela combinação linear

$$\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{S}) = k_1 \underset{\sim}{1} + k_2 \underset{\sim}{S} + k_3 \underset{\sim}{S}^2 . \tag{8.12.13}$$

Essa representação coincide com a de uma função isotrópica dada por (8.4.8).

Para determinar os invariantes k_1, k_2 e k_3 calculamos inicialmente os produtos internos definidos por (8.12.6) e (8.12.7), i.e.,

$$\begin{cases} \omega_1 = \operatorname{tr} \underset{\sim\sim}{1H} = \operatorname{tr} \underset{\sim}{H} = H_1 + H_2 + H_3, \\ \omega_2 = \operatorname{tr} \underset{\sim\sim}{SH} = S_1H_1 + S_2H_2 + S_3H_3, \\ \omega_3 = \operatorname{tr} \underset{\sim}{S}^2\underset{\sim}{H} = S_1^2H_1 + S_2^2H_2 + S_3^2H_3, \end{cases} \tag{8.12.14}$$

$$\begin{cases} \omega_{11} = \operatorname{tr} \underset{\sim}{1}\,\underset{\sim}{1} = \operatorname{tr} \underset{\sim}{1} = 3, \\ \omega_{12} = \omega_{21} = \operatorname{tr} \underset{\sim}{1}\,\underset{\sim}{S} = \operatorname{tr} \underset{\sim}{S} = S_1 + S_2 + S_3, \\ \omega_{13} = \omega_{31} = \operatorname{tr} \underset{\sim}{1}\,\underset{\sim}{S}^2 = \operatorname{tr} \underset{\sim}{S}^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2, \\ \omega_{22} = \operatorname{tr} \underset{\sim}{S}\,\underset{\sim}{S} = \operatorname{tr} \underset{\sim}{S}^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2, \\ \omega_{23} = \omega_{32} = \operatorname{tr} \underset{\sim}{S}^2\underset{\sim}{S} = \operatorname{tr} \underset{\sim}{S}^3 = S_1^3 + S_2^3 + S_3^3, \\ \omega_{33} = \operatorname{tr} \underset{\sim}{S}^2\underset{\sim}{S}^2 = \operatorname{tr} \underset{\sim}{S}^4 = S_1^4 + S_2^4 + S_3^4, \end{cases} \tag{8.12.15}$$

onde H_1, H_2 e H_3 são os autovalores de $\underset{\sim}{H}$ que é reduzido a forma diagonal simultaneamente com o tensor $\underset{\sim}{S}$. Então,

$$k_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \operatorname{tr} \underset{\sim}{H} & \operatorname{tr} \underset{\sim}{S} & \operatorname{tr} \underset{\sim}{S}^2 \\ \operatorname{tr} \underset{\sim\sim}{SH} & \operatorname{tr} \underset{\sim}{S}^2 & \operatorname{tr} \underset{\sim}{S}^3 \\ \operatorname{tr} \underset{\sim}{S}^2\underset{\sim}{H} & \operatorname{tr} \underset{\sim}{S}^3 & \operatorname{tr} \underset{\sim}{S}^4 \end{vmatrix} , \tag{8.12.16}$$

$$k_2 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 3 & \operatorname{tr} \underset{\sim}{H} & \operatorname{tr} \underset{\sim}{S}^2 \\ \operatorname{tr} \underset{\sim}{S} & \operatorname{tr} \underset{\sim\sim}{SH} & \operatorname{tr} \underset{\sim}{S}^3 \\ \operatorname{tr} \underset{\sim}{S}^2 & \operatorname{tr} \underset{\sim}{S}^2\underset{\sim}{H} & \operatorname{tr} \underset{\sim}{S}^4 \end{vmatrix} , \tag{8.12.17}$$

$$(8.12.18) \qquad k_3 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 3 & \operatorname{tr}\underset{\sim}{S} & \operatorname{tr}\underset{\sim}{H} \\ \operatorname{tr} S & \operatorname{tr}\underset{\sim}{S}^2 & \operatorname{tr}\underset{\sim}{SH} \\ \operatorname{tr} S^2 & \operatorname{tr}\underset{\sim}{S}^3 & \operatorname{tr}\underset{\sim}{S}^2\underset{\sim}{H} \end{vmatrix},$$

onde,

$$(8.12.19) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 3 & \operatorname{tr}\underset{\sim}{S} & \operatorname{tr}\underset{\sim}{S}^2 \\ \operatorname{tr}\underset{\sim}{S} & \operatorname{tr}\underset{\sim}{S}^2 & \operatorname{tr}\underset{\sim}{S}^3 \\ \operatorname{tr}\underset{\sim}{S}^2 & \operatorname{tr}\underset{\sim}{S}^3 & \operatorname{tr}\underset{\sim}{S}^4 \end{vmatrix}.$$

Vemos que se $\underset{\sim}{H}$ é uma função isotrópica conhecida de $\underset{\sim}{S}$ definida por (8.12.10) então, tendo em vista que $\underset{\sim}{T}_1$, $\underset{\sim}{T}_2$ e $\underset{\sim}{T}_3$ são também funções isotrópicas de $\underset{\sim}{S}$ dadas por $(8.12.11)_{1,2,3}$ resulta que $\operatorname{tr}\underset{\sim}{T}_1\underset{\sim}{H} = \operatorname{tr}\underset{\sim}{H}$, $\operatorname{tr}\underset{\sim}{T}_2\underset{\sim}{H} = \operatorname{tr}\underset{\sim}{SH}$ e $\operatorname{tr}\underset{\sim}{T}_3\underset{\sim}{H} = \operatorname{tr}\underset{\sim}{S}^2\underset{\sim}{H}$ devem ser invariantes escalares de $\underset{\sim}{S}$ somente, tal como expresso por (8.11.11). Nesse exemplo, $j = 3$ em (8.12.4) e o número de componentes independentes dos tensores $\underset{\sim}{1}$, $\underset{\sim}{S}$, $\underset{\sim}{S}^2$ é também três (são os três autovalores diferentes de $\underset{\sim}{S}$: S_1, S_2 e S_3).

Exemplo. Consideremos um tensor simétrico $\underset{\sim}{H}$ que é função

$$(8.12.20) \qquad \underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{1}, \underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B})$$

dos tensores simétricos $\underset{\sim}{A}$ e $\underset{\sim}{B}$ e do parâmetro $\underset{\sim}{1}$ que caracteriza a base como ortonormal e as transformações como ortogonais. O problema é representar o tensor $\underset{\sim}{H}$ como uma combinação linear de seis funções tensoriais simétricas linearmente independentes, dos tensores simétricos $\underset{\sim}{1}$, $\underset{\sim}{A}$ e $\underset{\sim}{B}$. Admitamos que os tensores simétricos $\underset{\sim}{A}$ e $\underset{\sim}{B}$ não são reduzidos simultaneamente a forma diagonal. Vamos escolher as seis funções simétricas

$$(8.12.21)\qquad \begin{cases} \underset{\sim}{T}_1 = \underset{\sim}{1}, \quad \underset{\sim}{T}_2 = \underset{\sim}{A}, \\ \underset{\sim}{T}_3 = \underset{\sim}{A}^2, \quad \underset{\sim}{T}_4 = \underset{\sim}{B}, \\ \underset{\sim}{T}_5 = \underset{\sim}{AB} + \underset{\sim}{BA}, \quad \underset{\sim}{T}_6 = \underset{\sim}{A}^2\underset{\sim}{B} + \underset{\sim}{BA}^2. \end{cases}$$

e examiná-las quanto a dependência linear.

Adotamos uma base coincidente com a dos autoversores de $\underset{\sim}{A}$, em relação a qual os componentes de $\underset{\sim}{B}$ são os números B_{ij}. Então, $\det [T_{(j)pq}]$ de (8.12.3) é dado por

(8.12.22):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ A_1 & A_2 & A_3 & 0 & 0 & 0 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{22} & B_{33} & B_{12} & B_{13} & B_{23} \\ 2B_{11}A_1 & 2B_{22}A_2 & 2B_{33}A_3 & B_{12}(A_1+A_2) & B_{13}(A_1+A_2) & B_{23}(A_1+A_3) \\ 2B_{11}A_1^2 & 2B_{22}A_2^2 & 2B_{33}A_3^2 & B_{12}(A_1^2+A_2^2) & B_{13}(A_1^2+A_3^2) & B_{23}(A_2^2+A_3^2) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ A_1 + A_2 & A_1 + A_3 & A_2 + A_3 \\ A_1^2 + A_2^2 & A_1^2 + A_3^2 & A_2^2 + A_3^2 \end{vmatrix} B_{12}\, B_{13}\, B_{23} =$$

$$= -(A_1-A_2)^2(A_1-A_3)^2(A_2-A_3)^2\, B_{12}\, B_{13}\, B_{23}.$$

Vemos que os seis tensores $\underset{\sim}{T}_i$ serão linearmente independentes desde que os autovalores A_1, A_2 e A_3 de $\underset{\sim}{A}$ sejam distintos e que $B_{12} \neq 0$, $B_{13} \neq 0$ e $B_{23} \neq 0$. Se um dos componentes B_{ij} $(i \neq j)$ de $\underset{\sim}{B}$ for nulo, isso significa que uma das direções principais do tensor $\underset{\sim}{B}$ situa-se em um plano que inclui as di-

reções principais de $\underset{\approx}{A}$, ou vice-versa. Se dois dos componentes B_{ij} $(i\neq j)$ de $\underset{\approx}{B}$ forem nulos, temos que uma das direções principais de $\underset{\approx}{B}$ coincide com uma direção principal de $\underset{\approx}{A}$. Se $B_{12} = B_{13} = B_{33} = 0$, os autoversores de $\underset{\approx}{B}$ e de $\underset{\approx}{A}$ coincidem.

Não sendo nulo o determinante, temos então a representação da função (8.12.20)

$$\underset{\approx}{H} = k_1 \underset{\approx}{1} + k_2 \underset{\approx}{A} + k_3 \underset{\approx}{A}^2 + k_4 \underset{\approx}{B} + k_5(\underset{\approx\approx}{AB}+\underset{\approx\approx}{BA}) + k_6(\underset{\approx}{A}^2\underset{\approx}{B}+\underset{\approx\approx}{BA}^2), \tag{8.12.23}$$

onde os invariantes $k_1, k_2, \ldots, k_6$ são funções dos tensores $\underset{\approx}{A}$ e $\underset{\approx}{B}$ determinadas por (8.11.9) em termos dos invariantes simultaneos dados por (8.12.6) e (8.12.7). Esses invariantes simultaneos são expressos por

$$\begin{cases} \omega_1 = 3, \\ \omega_2 = \operatorname{tr} \underset{\approx\approx}{AH}, \\ \omega_3 = \operatorname{tr} \underset{\approx}{A}^2\underset{\approx}{H}, \\ \omega_4 = \operatorname{tr} \underset{\approx\approx}{BH}, \\ \omega_5 = \operatorname{tr}(\underset{\approx\approx}{AB}+\underset{\approx\approx}{BA})\underset{\approx}{H} = \operatorname{tr} \underset{\approx\approx\approx}{ABH} + \operatorname{tr} \underset{\approx\approx\approx}{AHB}, \\ \omega_6 = \operatorname{tr}(\underset{\approx}{A}^2\underset{\approx}{B}+\underset{\approx\approx}{BA}^2)\underset{\approx}{H} = \operatorname{tr} \underset{\approx}{A}^2\underset{\approx\approx}{BH} + \operatorname{tr} \underset{\approx}{A}^2\underset{\approx\approx}{HB}, \end{cases} \tag{8.12.24}$$

$$\begin{cases} \omega_{11} = 3, \\ \omega_{12} = \omega_{21} = \operatorname{tr} \underset{\approx}{A}, \\ \omega_{13} = \omega_{31} = \operatorname{tr} \underset{\approx}{A}^2, \\ \omega_{14} = \omega_{41} = \operatorname{tr} \underset{\approx}{B}, \\ \omega_{15} = \omega_{51} = 2 \operatorname{tr} \underset{\approx\approx}{AB}, \\ \omega_{16} = \omega_{61} = 2 \operatorname{tr} \underset{\approx}{A}^2\underset{\approx}{B}, \\ \omega_{22} = \operatorname{tr} \underset{\approx}{A}^2, \end{cases} \tag{8.12.25}$$

$$
\begin{aligned}
&\omega_{23} = \omega_{32} = \operatorname{tr} \underset{\approx}{A}^3,\\
&\omega_{24} = \omega_{42} = \operatorname{tr} \underset{\approx}{A}\underset{\approx}{B},\\
&\omega_{25} = \omega_{52} = \operatorname{tr} \underset{\approx}{A}(\underset{\approx}{A}\underset{\approx}{B}+\underset{\approx}{B}\underset{\approx}{A}) = 2 \operatorname{tr} \underset{\approx}{A}^2\underset{\approx}{B},\\
&\omega_{26} = \omega_{62} = \operatorname{tr} \underset{\approx}{A}(\underset{\approx}{A}^2\underset{\approx}{B}+\underset{\approx}{B}\underset{\approx}{A}^2) = 2 \operatorname{tr} \underset{\approx}{A}^3\underset{\approx}{B},\\
&\omega_{33} = \operatorname{tr} \underset{\approx}{A}^4,\\
&\omega_{34} = \omega_{43} = \operatorname{tr} \underset{\approx}{A}^2\underset{\approx}{B},\\
&\omega_{35} = \omega_{53} = \operatorname{tr} \underset{\approx}{A}^2(\underset{\approx}{A}\underset{\approx}{B}+\underset{\approx}{B}\underset{\approx}{A}) = 2 \operatorname{tr} \underset{\approx}{A}^3\underset{\approx}{B},\\
&\omega_{36} = \omega_{63} = \operatorname{tr} \underset{\approx}{A}^2(\underset{\approx}{A}^2\underset{\approx}{B}+\underset{\approx}{B}\underset{\approx}{A}^2) = 2 \operatorname{tr} \underset{\approx}{A}^4\underset{\approx}{B},\\
&\omega_{44} = \operatorname{tr} \underset{\approx}{B}^2,\\
&\omega_{45} = \omega_{54} = \operatorname{tr} \underset{\approx}{B}(\underset{\approx}{A}\underset{\approx}{B}+\underset{\approx}{B}\underset{\approx}{A}) = 2 \operatorname{tr} \underset{\approx}{A}\underset{\approx}{B}^2,\\
&\omega_{46} = \omega_{64} = \operatorname{tr} \underset{\approx}{B}(\underset{\approx}{A}^2\underset{\approx}{B}+\underset{\approx}{B}\underset{\approx}{A}^2) = 2 \operatorname{tr} \underset{\approx}{A}^2\underset{\approx}{B}^2,\\
&\omega_{55} = \operatorname{tr} (\underset{\approx}{A}\underset{\approx}{B}+\underset{\approx}{B}\underset{\approx}{A})^2 = 2 \operatorname{tr} (\underset{\approx}{A}\underset{\approx}{B})^2 + 2 \operatorname{tr} \underset{\approx}{A}^2\underset{\approx}{B}^2\\
&\omega_{56} = \omega_{65} = \operatorname{tr} (\underset{\approx}{A}\underset{\approx}{B}+\underset{\approx}{B}\underset{\approx}{A})(\underset{\approx}{A}^2\underset{\approx}{B}+\underset{\approx}{B}\underset{\approx}{A}^2) =\\
&\qquad = 2 \operatorname{tr} \underset{\approx}{A}^2\underset{\approx}{B}\underset{\approx}{A}\underset{\approx}{B} + 2 \operatorname{tr} \underset{\approx}{A}^3\underset{\approx}{B}^2,\\
&\omega_{66} = \operatorname{tr} (\underset{\approx}{A}^2\underset{\approx}{B}+\underset{\approx}{B}\underset{\approx}{A})^2 = 2 \operatorname{tr} (\underset{\approx}{A}^2\underset{\approx}{B})^2 + 2 \operatorname{tr} \underset{\approx}{A}^4\underset{\approx}{B}^2.
\end{aligned}
$$

A representação (8.12.23) pode ser considerada como uma generalização da representação isotrópica (8.4.8) para o caso em que um tensor simétrico $\underset{\approx}{H}$ depende de dois tensores simétricos.

Se o tensor simétrico $\underset{\approx}{H}$ depende de um número qualquer m de tensores simétricos, i.e., se

$$\underset{\approx}{H} = \underset{\approx}{F}(\underset{\approx}{S}_1, \underset{\approx}{S}_2, \ldots, \underset{\approx}{S}_m), \tag{8.12.26}$$

e dois deles ($\underset{\approx}{S}_1 = \underset{\approx}{A}$ e $\underset{\approx}{S}_2 = \underset{\approx}{B}$) satisfazem a condição do determinante (8.12.22) não ser nulo então, a mesma representação (8.12.23) será válida. Nesse caso, entretanto, os invariantes

k_j $(j = 1,2,\ldots,6)$ serão funções dos invariantes do sistema de tensores $\underset{\sim}{S}_1, \underset{\sim}{S}_2, \ldots, \underset{\sim}{S}_m$, através dos determinantes Δ_j em (8.11.9). De fato, nesses determinantes, os elementos das colunas $j = 1,2,\ldots,6$ são os invariantes simultâneos (8.12.25), onde $\underset{\sim}{H}$ é a função conhecida (8.12.26) que é representada por (8.12.23).

CAPÍTULO 9

FUNÇÕES TENSORIAIS

9.1 - Funções tensoriais.

Um exemplo de função tensorial isotrópica é a função $\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T})$ representada pelo polinômio do segundo grau (8.4.8). Vimos que $\underset{\sim}{F}: D_{\mathbb{L}} \to \mathbb{L}$ é isotrópica quando a relação

$$\underset{\sim}{H}^* = \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{H}\,\underset{\sim}{Q}^T = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{Q}^T) = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T}^*), \tag{9.1.1}$$

é satisfeita para todo $\underset{\sim}{Q} \in \mathbb{O}$ e todo $\underset{\sim}{T} \in D_{\mathbb{L}}$.

Em relação a uma base $\mathbb{B} = \{\underset{\sim}{e}_i\}$ de $\mathbb{V}$, a função $\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T})$ pode ser expressa na <u>forma componente</u>

$$H_{ij} = F_{ij}\,(T_{k\ell}), \tag{9.1.2}$$

ou, explicitando a base,

$$H_{ij} = F_{ij}\,(T_{k\ell},\ \underset{\sim}{e}_m). \tag{9.1.3}$$

Nessas expressões componentes, F_{ij} simboliza nove funções escalares de nove argumentos escalares $T_{k\ell}$ ou, se $\underset{\sim}{H}$ e $\underset{\sim}{T}$ $(=\underset{\sim}{S})$ são simétricos, seis funções escalares de seis argumentos escalares $S_{k\ell}$, $k \le \ell$.

De acordo com (4.13.2) os tensores rodados $\underset{\sim}{H}^*$ e $\underset{\sim}{T}^*$ são expressos em termos da base rodada $\mathbb{B}^* = \{\underset{\sim}{e}^*_i = \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{e}_i\}$ de $\mathbb{V}$ pelas respectivas combinações lineares

$$\underset{\sim}{H}^* = H_{ij}\,\underset{\sim}{e}^*_i \otimes \underset{\sim}{e}^*_j\ , \tag{9.1.4}$$

$$\underset{\sim}{T}^* = T_{k\ell}\,\underset{\sim}{e}^*_k \otimes \underset{\sim}{e}^*_\ell\ . \tag{9.1.5}$$

Então, a condição de isotropia da função $\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T})$, expressa por $\underset{\sim}{H}^* = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T}^*)$, na forma componente é dada por

$$H_{ij} = F_{ij}\ (T_{k\ell},\ \underset{\sim}{Q}\ \underset{\sim}{e}_m) \tag{9.1.6}$$

para todo $\underset{\sim}{Q} \in \mathcal{O}$. Esse resultado diz que uma função tensorial de um tensor é isotrópica se e somente quando a forma de suas funções componentes é a mesma para qualquer base ortonormal de $\mathbb{V}$.

As definições de funções tensoriais isotrópicas expressas por (9.1.1) e (9.1.6) podem ser estendidas às funções cujos argumentos e valores são tensores de qualquer ordem (ou mesmo pontos no caso particularizado por (9.1.6)). Por exemplo, uma função vetorial $\underset{\sim}{f}: \mathcal{D}_{\mathcal{S}\times\mathbb{V}} \to \mathbb{V}$ definida tensorialmente por

$$\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{S},\underset{\sim}{v}) \tag{9.1.7}$$

é isotrópica se

$$\underset{\sim}{Q}\ \underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{Q}\ \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{S},\underset{\sim}{v}) = \underset{\sim}{u}^* = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{Q}\ \underset{\sim}{S}\ \underset{\sim}{Q}^T,\ \underset{\sim}{Q}\ \underset{\sim}{v}) = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{S}^*,\underset{\sim}{v}^*) \tag{9.1.8}$$

ou, se

$$u_i = f_i\ (T_{jk},\ v_\ell,\ \underset{\sim}{Q}\ \underset{\sim}{e}_m), \tag{9.1.9}$$

para todo $\underset{\sim}{Q} \in \mathcal{O}$. Como exemplo simples, a função escalar de um vetor

$$f(\underset{\sim}{v}) = \underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{v}^2 \tag{9.1.10}$$

é isotrópica porque

$$f(\underset{\sim}{v}^*) = f(\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{v}) = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{Q}\ \underset{\sim}{Q}^T\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{v} = f(\underset{\sim}{v})\ . \tag{9.1.11}$$

Um exemplo simples de função <u>anisotrópica</u> é o produto escalar de um vetor $\underset{\sim}{v}$ por um versor constante $\underset{\sim}{n}$. De fato,

(9.1.12) $$f(\underset{\sim}{v}) = \underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{n} \neq f(\underset{\sim}{v}^*) = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{n}.$$

Nesse exemplo, o versor constante $\underset{\sim}{n}$ pode ser considerado como parâmetro característico da anisotropia da função.

As funções tensoriais isotrópicas de valor escalar são chamadas de invariantes ortogonais ou simplesmente de invariantes. A função (9.1.10) é um invariante de um vetor e o traço momento e determinante são exemplos de invariantes de um tensor.

As funções escalares de diversos tensores são isotrópicas se

(9.1.13) $$f(\underset{\sim}{T}_1,\underset{\sim}{T}_2,\ldots,\underset{\sim}{T}_m) = f(\underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{T}_1\,\underset{\sim}{Q}^T,\ldots,\underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{T}_m\,\underset{\sim}{Q}^T),$$

para todo $\underset{\sim}{Q} \in \mathbb{O}$. Essas funções são chamadas de <u>invariantes simultâneos</u>. Em (8.12.6) e (8.12.7) vimos invariantes simultâneos de dois tensores e o produto escalar $\underset{\sim}{u}\cdot\underset{\sim}{v}$ é um invariante simultâneo de dois vetores.

As funções tensoriais anisotrópicas podem ser invariantes em relação a um certo subgrupo do grupo $\mathbb{O}$ de todas as transformações ortogonais. Se esse subgrupo é o dos tensores ortogonais próprios, $\mathbb{O}^+$, a invariância é chamada de <u>hemitropia</u> e as funções invariantes em relação a $\mathbb{O}^+$ são chamadas de <u>funções hemitrópicas</u>.

Em três dimensões, não há distinção entre isotropia e hemitropia de funções cujos valores e argumentos são tensores de ordem par. De fato, se $\underset{\sim}{Q}$ é impróprio ($\det \underset{\sim}{Q} = -1$) então $-\underset{\sim}{Q}$ é proprio porque

(9.1.14) $$\det(-\underset{\sim}{Q}) = -\det \underset{\sim}{Q} = 1,$$

e $\underset{\sim}{T}^* = \underset{\sim}{Q}\ \underset{\sim}{T}\ \underset{\sim}{Q}^T$ permanece inalterado quando $\underset{\sim}{Q}$ é substituido por $-\underset{\sim}{Q}$. Em geral, entretanto, as funções hemitrópicas não são isotrópicas, e, um exemplo é o produto vetorial de dois vetores

$$f(\underset{\sim}{u},\underset{\sim}{v}) = \underset{\sim}{u}\times\underset{\sim}{v}, \tag{9.1.15}$$

conforme pode ser verificado com (5.7.3), i.e., com a expressão

$$\underset{\sim}{u}^*\times\underset{\sim}{v}^* = \det \underset{\sim}{Q}\ (\underset{\sim}{u}\times\underset{\sim}{v})^*. \tag{9.1.16}$$

Por outro lado, algumas funções isotrópicas são invariantes em relação a um grupo de transformações maior do que o grupo $\mathcal{O}$. Por exemplo, a função escalar isotrópica tr $\underset{\sim}{T}$ é invariante também em relação ao grupo de automorfismos $\underset{\sim}{A}$ pois, se

$$\bar{\underset{\sim}{T}} = \underset{\sim}{A}\ \underset{\sim}{T}\ \underset{\sim}{A}^{-1} \tag{9.1.17}$$

então,

$$\text{tr}\ \bar{\underset{\sim}{T}} = \text{tr}(\underset{\sim}{A}\ \underset{\sim}{T}\ \underset{\sim}{A}^{-1}) = \text{tr}(\underset{\sim}{A}^{-1}\ \underset{\sim}{A}\ \underset{\sim}{T}) = \text{tr}\ \underset{\sim}{T}. \tag{9.1.18}$$

Já o produto escalar de dois vetores é uma função escalar isotrópica que não é invariante em relação ao grupo dos automorfismos. De fato, em contraste com (4.1.4), se

$$\bar{\underset{\sim}{v}} = \underset{\sim}{A}\ \underset{\sim}{v}, \tag{9.1.19}$$

então,

$$\bar{\underset{\sim}{u}}\cdot\bar{\underset{\sim}{v}} = \underset{\sim}{A}\underset{\sim}{u}\cdot\underset{\sim}{A}\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{A}^T\ \underset{\sim}{A}\underset{\sim}{u} \neq \underset{\sim}{u}\cdot\underset{\sim}{v}\ . \tag{9.1.20}$$

Então, tr $\underset{\sim}{T}$ é uma função invariante sob qualquer transformação de bases enquanto que o produto interno é invariante somente sob transformações ortogonais.

9.2 - Funções tensoriais lineares.

Uma função tensorial é chamada de linear quando é aditiva e homogênea em relação ao seu argumento. Se $\underset{\sim}{\mathcal{F}} = \underset{\sim}{\mathcal{L}}$ é uma função linear, temos, em vez de (1.6.1) a notação

$$\underset{\sim}{\mathcal{L}}: \mathbb{X} \to \mathbb{Y} \tag{9.2.1}$$

mostrando que o domínio é todo o espaço vetorial $\mathbb{X}$. Por exemplo, uma função vetorial de um tensor

$$\underset{\sim}{\ell}: \mathbb{L} \to \mathbb{V} \tag{9.2.2}$$

é linear quando para quaisquer $\underset{\sim}{R}, \underset{\sim}{T} \in \mathbb{L}$ e $a \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{cases} \underset{\sim}{\ell}(\underset{\sim}{R}+\underset{\sim}{T}) = \underset{\sim}{\ell}(\underset{\sim}{R}) + \underset{\sim}{\ell}(\underset{\sim}{T}) \\ \\ \underset{\sim}{\ell}(a\underset{\sim}{T}) = a\ \underset{\sim}{\ell}(\underset{\sim}{T}). \end{cases} \tag{9.2.3}$$

Uma função de vários argumentos tensoriais é chamada de multilinear quando for linear em cada um de seus argumentos. Por exemplo, a função vetorial de dois tensores $\underset{\sim}{T}_1$ e $\underset{\sim}{T}_2$

$$\underset{\sim}{\ell}: \mathbb{L} \times \mathbb{L} \to \mathbb{V}, \tag{9.2.4}$$

é linear quando

$$\begin{cases} \underset{\sim}{\ell}(\underset{\sim}{T}_1+\underset{\sim}{R},\ \underset{\sim}{T}_2) = \underset{\sim}{\ell}(\underset{\sim}{T}_1,\underset{\sim}{R}) + \underset{\sim}{\ell}(\underset{\sim}{R},\underset{\sim}{T}_2) \\ \\ \underset{\sim}{\ell}(\underset{\sim}{T}_1,\ a\ \underset{\sim}{T}_2) = a\ \underset{\sim}{\ell}(\underset{\sim}{T}_1,\underset{\sim}{T}_2) \end{cases} \tag{9.2.5}$$

que define a linearidade em $\underset{\sim}{T}_1$ e ao mesmo tempo,

$$\begin{cases} \underset{\sim}{\ell}(\underset{\sim}{T}_1,\underset{\sim}{T}_2+\underset{\sim}{R}) = \underset{\sim}{\ell}(\underset{\sim}{T}_1,\underset{\sim}{T}_2) + \underset{\sim}{\ell}(\underset{\sim}{T}_1,\underset{\sim}{R}); \\ \\ \underset{\sim}{\ell}(a\ \underset{\sim}{T}_1,\underset{\sim}{T}_2) = a\ \underset{\sim}{\ell}(\underset{\sim}{T}_1,\underset{\sim}{T}_2), \end{cases} \tag{9.2.6}$$

que define a linearidade em $\underset{\sim}{T}_2$, para quaisquer $\underset{\sim}{T}_1, \underset{\sim}{T}_2$, $R \in \mathbb{L}$ e qualquer $a \in \mathbb{R}$. Dizemos que essas funções são lineares ou multilineares sobre o corpo dos números reais.

Chamamos de <u>forma linear</u> a uma função linear escalar de um argumento tensorial, simbolizada por

$$\ell : \mathbb{X} \to \mathbb{R}. \tag{9.2.7}$$

<u>Forma multilinear</u> é uma função escalar linear em relação a mais de um argumento tensorial. Um exemplo é a forma bilinear de dois vetores que define em (4.9.1) um tensor de segunda ordem. Uma função tensorial multilinear é chamada de <u>simétrica</u> quando a permuta de dois quaisquer de seus argumentos, um com o outro, não altera a função. Quando essa permuta troca o sinal, a função é chamada de <u>antissimétrica</u>.

De um modo geral, funções tensoriais multilineares de tensores de determinada ordem identificam tensores de maior ordem. Por exemplo, a função escalar trilinear (forma trilinear)

$$\ell(\underset{\sim}{u},\underset{\sim}{v},\underset{\sim}{w}) = \mathfrak{e}_{ijk}\, u_i\, v_j\, w_k = \underset{\sim}{u} \times \underset{\sim}{v} \cdot \underset{\sim}{w} \tag{9.2.8}$$

e a função vetorial bilinear

$$\ell(\underset{\sim}{u},\underset{\sim}{v}) = \mathfrak{e}_{ijk}\, u_i\, v_j\, \underset{\sim}{e}_k = \underset{\sim}{u} \times \underset{\sim}{v}, \tag{9.2.9}$$

caracterizam o tensor antissimétrico de terceira ordem de componentes $\mathfrak{e}_{ijk}$. Como um outro exemplo, a forma bilinear de dois tensores

$$\ell(\underset{\sim}{T},\underset{\sim}{R}) = \mathfrak{C}_{ijk\ell}\, T_{ij}\, R_{k\ell}, \tag{9.2.10}$$

identifica um tensor de quarta ordem $\underset{\sim}{\mathfrak{C}}$.

9.3 - Tensores de quarta ordem.

Um tensor pode ser definido, de um modo geral, como um endomorfismo, i.e., como um tipo de função linear simbolizada por

(9.3.1) $$\underset{\sim}{\mathcal{L}}: \mathbb{X} \to \mathbb{X}.$$

Se $\mathbb{X} = \mathbb{V}$, $\underset{\sim}{\mathcal{L}} = \underset{\sim}{T}$, e,

(9.3.2) $$\underset{\sim}{T}: \mathbb{V} \to \mathbb{V},$$

é um tensor de segunda ordem.

Se $\mathbb{X} = \mathbb{L}$, $\underset{\sim}{\mathcal{L}} = \underset{\sim}{\mathbb{C}}$ é um tensor de quarta ordem

(9.3.3) $$\underset{\sim}{\mathbb{C}}: \mathbb{L} \to \mathbb{L},$$

que transforma linearmente um tensor de segunda ordem $\underset{\sim}{T}$ em outro tensor de segunda ordem

(9.3.4) $$\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{\mathbb{C}}\,\underset{\sim}{T}.$$

Os componentes de $\underset{\sim}{\mathbb{C}}$ são definidos por

(9.3.5) $$\mathbb{C}_{ijkl} = \underset{\sim}{e}_i \cdot \underset{\sim}{\mathbb{C}}(\underset{\sim}{e}_k \otimes \underset{\sim}{e}_l)\underset{\sim}{e}_j = (\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j) \cdot \underset{\sim}{\mathbb{C}}(\underset{\sim}{e}_k \otimes \underset{\sim}{e}_l),$$

de sorte que a transformação (9.3.4) é expressa por

(9.3.6) $$H_{ij} = \mathbb{C}_{ijkl}\, T_{kl}.$$

Por transformação ortogonal de base, $\underset{\sim}{e}^*_i = \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{e}_i$, os componentes rodados de $\underset{\sim}{\mathbb{C}}$ são expressos por

(9.3.7) $$\mathbb{C}'_{ijkl} = Q_{mi}\, Q_{nj}\, Q_{pk}\, Q_{ql}\, \mathbb{C}_{mnpq}.$$

Se em (9.3.4), os tensores $\underset{\sim}{H}$ e $\underset{\sim}{T}$ são simétricos, em vez de (9.3.3) podemos ter

(9.3.8) $$\mathbb{C}: \mathbb{S} \to \mathbb{S},$$

e os componentes de $\underset{\sim}{\mathbb{C}}$ devem satisfazer as relações

(9.3.9) $$\mathbb{C}_{ijkl} = \mathbb{C}_{jikl} = \mathbb{C}_{ijlk} = \mathbb{C}_{jilk}.$$

O tensor transposto $\underset{\sim}{\mathbb{C}}^T$ de um tensor de quarta ordem é o tensor único que para todos tensores $\underset{\sim}{R}, \underset{\sim}{T} \in \mathbb{L}$, satisfaz a

(9.3.10) $$\underset{\sim}{T} \cdot \underset{\sim\sim}{\mathbb{C}} \underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{\mathbb{C}}^T \underset{\sim}{T} \cdot \underset{\sim}{R} .$$

Em componentes, temos

(9.3.11) $$\mathbb{C}^T_{ijkl} = \mathbb{C}_{klij} .$$

Um tensor simétrico de quarta ordem é definido por

(9.3.12) $$\underset{\sim}{\mathbb{C}} = \underset{\sim}{\mathbb{C}}^T,$$

i.e., por

(9.3.13) $$\mathbb{C}_{ijkl} = \mathbb{C}_{klij} ;$$

que está de acordo (9.3.10) e a definição de forma bilinear simétrica dada por

(9.3.14) $$\ell(\underset{\sim}{T}, \underset{\sim}{R}) = \ell(\underset{\sim}{R}, \underset{\sim}{T}).$$

9.4 - Representação de formas lineares.

As funções escalares lineares (formas lineares)

(9.4.1) $$\ell: \mathbb{X} \to \mathbb{R},$$

são sempre representadas por um produto interno.

No caso de $\mathbb{X} = \mathbb{V}$, a forma linear de um vetor

(9.4.2) $$k = \ell(\underset{\sim}{v})$$

é representada por

(9.4.3) $$\ell(\underset{\sim}{v}) = \underset{\sim}{\ell}\cdot\underset{\sim}{v},$$

onde $\underset{\sim}{\ell}$ é um determinado vetor arbitrário de V. Por exemplo, se $\underset{\sim}{\ell}_i$ é um vetor base $\underset{\sim}{e}_i$:

(9.4.4) $$\ell(\underset{\sim}{v}) = \underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{e}_i = v_i,$$

i.e., vetores são <u>representados</u> por seus componentes em relação a uma base.

Se $\mathbb{X} = \mathbb{L}$ em (9.4.1), a forma linear de um tensor $\underset{\sim}{T}$,

(9.4.5) $$k = \ell(\underset{\sim}{T}),$$

é representada por

(9.4.6) $$\ell(\underset{\sim}{T}) = \underset{\sim}{L}\cdot\underset{\sim}{T} = tr(\underset{\sim}{L}\,\underset{\sim}{T}^T) = tr(\underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{L}^T),$$

onde $\underset{\sim}{L}$ é um tensor de $\mathbb{L}$. Pondo $\underset{\sim}{L}$ igual a um tensor escalar $c\,\underset{\sim}{1}$, temos a representação

(9.4.7) $$\ell(\underset{\sim}{T}) = c\ tr\ \underset{\sim}{T} = c\ tr\ \underset{\sim}{S}^T.$$

Pondo $\underset{\sim}{L}_{ij} = \underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j$ vemos que

(9.4.8) $$\ell(\underset{\sim}{T}) = \underset{\sim}{T}\cdot\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j = T_{ij},$$

i.e., cada componente de um tensor o <u>representa</u> em relação a um determinado versor base $e_i \otimes e_j$ de $\mathbb{L}$.

9.5 - Representações de invariantes de um tensor simétrico.

Consideremos os invariantes ortogonais (funções escalares isotrópicas) de um tensor simétrico simbolizados por

$$k = f(\underset{\sim}{S}). \tag{9.5.1}$$

A função sendo isotrópica temos

$$k = f(\underset{\sim}{S}) = f(\underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{S}\,\underset{\sim}{Q}^{T}) = f(\underset{\sim}{S}^{*}), \tag{9.5.2}$$

e, de acordo com (7.1.5),

$$k = f(\underset{\sim}{S}^{*}) = f\left(\sum_{i=1}^{3} S_i\, \underset{\sim}{n}_i^{*} \otimes \underset{\sim}{n}_i^{*}\right), \tag{9.5.3}$$

ou, matricialmente,

$$f([\underset{\sim}{S}]) = f\left(\left[\begin{matrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 \end{matrix}\right]\right). \tag{9.5.4}$$

Então a representação de um invariante de um tensor simétrico é expressa por

$$k = f(S) = \phi(S_1, S_2, S_3), \tag{9.5.5}$$

onde a função $\phi(S_1,S_2,S_3)$ é uma função simétrica dos autovalores do tensor $\underset{\sim}{S}$ correspondentes aos autoversores $\underset{\sim}{u}_i$, que, são iguais aos autovalores do tensor $\underset{\sim}{S}^{*}$ correspondentes aos autoversores $\underset{\sim}{n}_i^{*} = \underset{\sim}{Q}\underset{\sim}{n}$. Exemplos de invariantes de $\underset{\sim}{S}$ são os invariantes principais I_i que são os polinômios simétricos elementares dados por (6.2.6) e os momento $\bar{I}_i$ que são polinômios simétricos dados por (6.2.11).

Os tensores $\underset{\sim}{S}$ e $\underset{\sim}{S}^*$ têm também a mesma equação característica e portanto, os mesmos invariantes principais I_1, I_2 e I_3. Então, uma função escalar isotrópica de um tensor simétrico, (9.5.1), tem em geral as representações equivalentes,

$$k = f(S) = \phi(S_i) = \psi(I_i) = \chi(\bar{I}_i), \tag{9.5.6}$$

onde ϕ, ψ e χ são diferentes funções simétricas de conjuntos de três diferentes invariantes escalares independentes de $\underset{\sim}{S}$.

Se o tensor argumento em (9.5.1) é assimétrico, podemos ter representações dos tipos (9.5.6) com funções de até seis argumentos invariantes reais independentes como os expressos por (7.11.1).

Se o invariante de um tensor simétrico (9.5.1), é uma função escalar polinomial, i.e., um polinômio nos componentes S_{ij} de $\underset{\sim}{S}$, as funções representativas ϕ, ψ e χ serão também polinômios em seus respectivos argumentos S_i, I_i e $\bar{I}_i$. Isso está de acordo com o <u>teorema fundamental de polinômios simétricos</u>, segundo o qual, um polinômio simétrico pode ser expresso como um polinômio nos polinômios simétricos elementares I_1, I_2 e I_3. Então, esses polinômios constituem uma base chamada de <u>base polinomial</u> ou de <u>base de integridade</u> de todos os polinômios simétricos.

9.6 - Representações de funções tensoriais isotrópicas de um tensor, e um tensor e um vetor.

Vimos que uma função isotrópica

$$\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T}) \tag{9.6.1}$$

admite as representações equivalentes (8.4.8), e (8.4.9), i.e.,

$$\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T}) = k_0 \underset{\sim}{1} + k_1 \underset{\sim}{T} + k_2 \underset{\sim}{T}^2, \tag{9.6.2}$$

e, se $\underset{\sim}{T}$ é inversível,

$$\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T}) = b_0 \underset{\sim}{1} + b_1 \underset{\sim}{T} + b_{-1} \underset{\sim}{T}^{-1}, \tag{9.6.3}$$

onde os coeficientes k_0, k_1, k_2 e b_0, b_1, b_{-1} são invariantes que por sua vez podem ser expressos como funções de outros invariantes independentes do tensor $\underset{\sim}{T}$.

Se o argumento $\underset{\sim}{T}$ e portanto o valor $\underset{\sim}{H}$, são simétricos, os coeficientes em (9.6.2) ou (9.6.3) são funções polinomiais simétricas dadas por (9.5.6).

O seguinte resultado é importante: "Uma função vetorial

$$\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{S},\underset{\sim}{u}) \tag{9.6.4}$$

de um tensor simétrico $\underset{\sim}{S}$ e um vetor $\underset{\sim}{u}$ é isotrópica se e somente se ela tiver uma representação da forma

$$\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{S},\underset{\sim}{u}) = (d_0 \underset{\sim}{1} + d_1 \underset{\sim}{S} + d_2 \underset{\sim}{S}^2)\underset{\sim}{u}, \tag{9.6.5}$$

onde os coeficientes d_i, $i=0,1,2$, são invariantes simultâneos de $\underset{\sim}{S}$ e $\underset{\sim}{u}$".

9.7 - Representação de invariantes simultâneos.

Um teorema de Cauchy diz que "uma função escalar de vários vetores

$$k = f(\underset{\sim}{v}_1, \underset{\sim}{v}_2, \ldots, \underset{\sim}{v}_m) \tag{9.7.1}$$

é um invariante simultâneo, i.e., é uma função isotrópica definida por

$$k = f(\underset{\sim}{v}_1, \underset{\sim}{v}_2, \ldots, \underset{\sim}{v}_m) = f(\underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{v}_1, \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{v}_2, \ldots, \underset{\sim}{Q}\,\underset{\sim}{v}_m) = f(\underset{\sim}{v}_1^*, \underset{\sim}{v}_2^*, \ldots, \underset{\sim}{v}_m^*), \tag{9.7.2}$$

se e somente se ela puder ser expressa por uma função dos produtos internos

$$k = f(\underset{\sim}{v}_i \cdot \underset{\sim}{v}_j), \qquad i,j = 1,2,\ldots,m. \tag{9.7.3}$$

Se a função (9.7.1) for um polinômio escalar em vários vetores, a representação (9.7.3) será também um polinômio com produtos internos entre esses vários vetores".

Exemplos simples no caso de dois vetores e dois tensores são:

$$k = f(\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v}) = f(\underset{\sim}{u}^2, \underset{\sim}{v}^2, \underset{\sim}{u} \cdot \underset{\sim}{v}), \tag{9.7.4}$$

$$k = f(\underset{\sim}{H}, \underset{\sim}{T}) = f(\operatorname{tr} \underset{\sim}{H}\,\underset{\sim}{H}^T,\ \operatorname{tr} \underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{T}^T,\ \operatorname{tr} \underset{\sim}{H}\,\underset{\sim}{T}^T). \tag{9.7.5}$$

De importância é o seguinte resultado: "uma função escalar

$$k = f(\underset{\sim}{S}, \underset{\sim}{v}) \tag{9.7.6}$$

de um tensor simétrico $\underset{\sim}{S}$ e um vetor $\underset{\sim}{v}$ é um invariante ortogonal se e somente se ela puder ser expressa por uma função dos seis invariantes especiais

(9.7.7) $$\overset{S}{\underset{\sim}{I}}_1,\ \overset{S}{\underset{\sim}{I}}_2,\ \overset{S}{\underset{\sim}{I}}_3,\ \underset{\sim}{v}^2,\ \underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{S}\underset{\sim}{v},\ \underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{S}^2\underset{\sim}{v}\ .$$

Se a função (9.7.6) for um polinômio em $\underset{\sim}{S}$ e $\underset{\sim}{v}$, a função dos invariantes (9.7.7) também será polinomial".

Os coeficientes d_i de (9.6.5) podem ser expressos como funções dos invariantes especiais (9.7.7).

CAPÍTULO 10

GRADIENTE DE FUNÇÕES TENSORIAIS

10.1 - Cálculo de funções tensoriais.

Consideremos funções tensoriais $\mathcal{F}: D_{\mathcal{X}} \to \mathcal{Y}$ onde os elementos do domínio $D_{\mathcal{X}}$ e imagem $\mathcal{Y}$ podem ser números reais de $\mathbb{R}$, pontos de $\mathbb{E}$, vetores de $\mathbb{V}$ e tensores de $\mathbb{L}$ ou de $\mathbb{S}$. O isomorfismo que existe entre os espaços de mesmas dimensões, i.e., entre $\mathbb{E}$, $\mathbb{V}$ e $\mathbb{R}^3$, entre $\mathbb{S}$ e $\mathbb{R}^6$ e entre $\mathbb{L}$ e $\mathbb{R}^9$, permite concretizar com pontos, setas e números o cálculo das funções tensoriais.

Nos espaços vetoriais em geral, as noções preliminares de vizinhança, limite, convergência e continuidade, necessárias para o cálculo das funções tensoriais, são todas relacionadas com a noção de distância, definida através do produto interno, por (2.2.4) em $\mathbb{E}$, (2.1.4) em $\mathbb{V}$ e (3.9.3) em $\mathbb{L}$. Uma função linear, por exemplo, é sempre contínua.

10.2 - Aproximação linear.

No cálculo escalar das funções $f: D_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ definidas por $y = f(x)$, a derivada $f'(x)$ é uma função linear

$$f': \mathbb{R} \to \mathbb{R}. \tag{10.2.1}$$

Essa função derivada é uma aproximação linear da variação de y

com x em um ponto x. Dizemos que $f'(x)$ é uma função cujo gráfico é uma reta tangente em x ao gráfico de $f(x)$. Do mesmo modo, no cálculo tensorial, a função não-linear $\underset{\sim}{\mathcal{F}}: D_{\mathbb{X}} \to \mathbb{Y}$ é linearizada pela função

$$\underset{\sim}{\mathcal{L}} = \underset{\sim}{\mathcal{F}}': \mathbb{X} \to \mathbb{Y}, \tag{10.2.2}$$

chamada de <u>derivada</u> de $\underset{\sim}{\mathcal{F}}$.

Como um exemplo de linearização de função tensorial, consideremos a deformação $\underset{\sim}{\chi}: D_{\mathbb{E}} \to \mathbb{E}$ definida por $\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{\chi}(\underset{\sim}{x})$ (Fig. 10.2.1). A função $\underset{\sim}{\chi}$ transforma o cubo do domínio $D_{\mathbb{E}}$ no poliedro curvilíneo da imagem $\underset{\sim}{\chi}(D_{\mathbb{E}})$ mas, a função derivada da deformação, $\underset{\sim}{\chi}'$, que nesse caso é também chamada de gradiente da deformação, $\nabla\underset{\sim}{\chi}$, é o tensor

$$\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{\chi}' = \nabla\underset{\sim}{\chi}: \mathbb{E} \to \mathbb{E}, \tag{10.2.3}$$

que transforma o cubo P no paralelepípedo tangente ao poliedro curvilíneo $\underset{\sim}{F}(P)$. Esse tensor $\underset{\sim}{F}$, chamado de <u>deformação local</u>, transforma linearmente um vetor $\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}_o$ no vetor

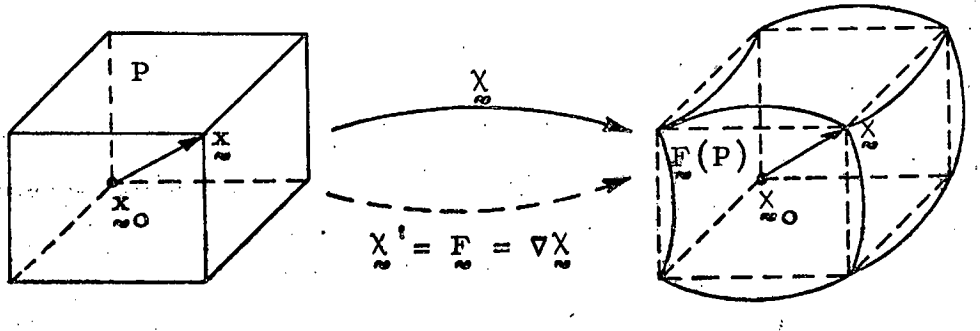

Fig. 10.2.1 - Aproximação linear da deformação.

$\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}_o = \underset{\sim}{\chi}(\underset{\sim}{x}) - \underset{\sim}{x}_o$, conforme expresso pela deformação homogênea (4.11.1).

De acordo com (5.6.2), o módulo do determinante de $\underset{\sim}{F}$ mede a razão entre o volume do cubo linearmente deformado $\underset{\sim}{F}(P)$ e o volume do cubo original P, i.e.,

$$|\det \underset{\sim}{F}| = v(\underset{\sim}{F}(P))/v(P). \tag{10.2.4}$$

10.3 - Diferenciabilidade.

Quando existe a função linear $\underset{\sim}{\mathcal{L}} = \nabla \underset{\sim}{\mathcal{F}}$ em um "ponto" do domínio D_X, dizemos que essa função é diferenciável nesse "ponto". A função gradiente quando existe é única.

Quando $\underset{\sim}{\mathcal{F}}$ é diferenciável em doso os "pontos" de D_X e a função gradiente é contínua em D_X, dizemos que a função $\underset{\sim}{\mathcal{F}}$ é de classe C^1 em D_X, função C em D_V ou ainda suave em D_X. Quando a função $\underset{\sim}{\mathcal{F}}$ é da classe C^1 e o seu gradiente for suave em D_X dizemos que $\underset{\sim}{\mathcal{F}}$ é da classe C^2. Prosseguindo com as classes dizemos que a função $\underset{\sim}{\mathcal{F}}$ é da classe C^N em D_X quando for da classe C^{N-1} e quando o seu gradiente $\nabla^{(N-1)}\underset{\sim}{\mathcal{F}}$ for suave.

A função $\underset{\sim}{\mathcal{F}}$ é analítica em D_V quando pode ser representada por uma série de potências na vizinhança de um "ponto" de D_X. Uma função analítica é da classe C^∞.

10.4 - Derivada de funções de argumento escalar.

Sem perda de generalidade admitamos que o argumento escalar é o tempo t. Consideremos as funções $\underset{\sim}{\mathfrak{F}}(t)$ cujos valores podem ser pontos vetores ou tensores, simbolizadas por

$$\underset{\sim}{\mathfrak{F}}: D_{\mathbb{R}} \to \mathbb{Y}, \tag{10.4.1}$$

ou,

$$\mathfrak{F}: [a,b] \to \mathbb{Y}, \tag{10.4.2}$$

onde $D_{\mathbb{R}}$ é um intervalo fechado $[a,b]$ do conjunto de números reais $\mathbb{R}$ (conjunto que possue a estrutura de espaço vetorial de uma dimensão). A derivada $\dot{\underset{\sim}{\mathfrak{F}}}(t)$, quando existe, é definida por

$$\dot{\underset{\sim}{\mathfrak{F}}}(t) = \lim_{n \to 0} \frac{\underset{\sim}{\mathfrak{F}}(t+n) - \underset{\sim}{\mathfrak{F}}(t)}{n} . \tag{10.4.3}$$

Se o contradomínio é um espaço pontual, então $\underset{\sim}{\mathfrak{F}}(t) = \underset{\sim}{f}(t) = \underset{\sim}{x}(t)$ e a função derivada, definida por

$$\dot{\underset{\sim}{x}}(t) = \lim_{n \to 0} \frac{\underset{\sim}{x}(t+n) - \underset{\sim}{x}(t)}{n} , \tag{10.4.4}$$

é um vetor, pois, o numerador do limite é uma diferença pontual. Quando os elementos do contradomínio são vetores, então, $\underset{\sim}{\mathfrak{F}}(t) = \underset{\sim}{v}(t)$ e a derivada

$$\dot{\underset{\sim}{v}}(t) = \lim_{n \to 0} \frac{\underset{\sim}{v}(t+n) - \underset{\sim}{v}(t)}{n} \tag{10.4.5}$$

é uma função cujo valor é um vetor. Se $\mathbb{Y} = \mathbb{L}$, então $\underset{\sim}{\mathfrak{F}}(t) = \underset{\sim}{\mathfrak{F}}(t) = \underset{\sim}{H}(t)$, e a função derivada definida por

$$\dot{\underset{\sim}{H}}(t) = \lim_{n \to 0} \frac{\underset{\sim}{H}(t+n) - \underset{\sim}{H}(t)}{n} \tag{10.4.6}$$

tem como valor um tensor. Então a função derivada é uma função linear simbolizada por

$$\dot{\underset{\sim}{\mathfrak{F}}}: \mathbb{R} \to \mathbb{Y}. \tag{10.4.7}$$

A função definida por (10.4.2) é chamada de curva em $\mathbb{Y}$ entre $\underset{\sim}{\mathfrak{F}}(a)$ e $\underset{\sim}{\mathfrak{F}}(b)$. A função derivada $\dot{\underset{\sim}{\mathfrak{F}}}(t)$ que é tangente a curva em $\underset{\sim}{\mathfrak{F}}(t)$ é chamada de velocidade instantânea ou de taxa instantânea (de variação) da função $\underset{\sim}{\mathfrak{F}}(t)$. O comprimento $\|\dot{\underset{\sim}{\mathfrak{F}}}(t)\|$ é chamado de velocidade escalar ou de taxa escalar. O nome velocidade é emprestado do caso em que $\mathbb{Y} = \mathbb{E}$ (Fig. 10.4.1).

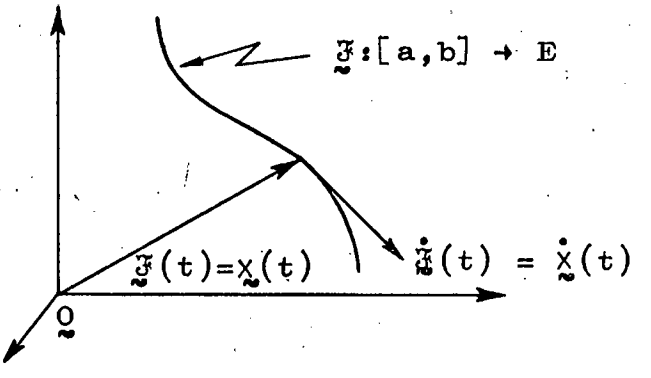

Fig. 10.4.1 - Velocidade.

As regras do cálculo escalar são facilmente estendidas as funções vetoriais de uma variável real t. Quanto a derivada de um produto, devemos levar em conta os diversos tipos de produto tais como o produto de um escalar por um vetor ou tensor, o produto escalar de dois vetores ou dois tensores, o produto vetorial de dois ou mais vetores, o produto misto, o produto tensorial de dois vetores, o produto externo de dois vetores e o produto de dois tensores.

10.5 - Derivada de tensor ortogonal.

Como um exemplo, consideremos a expressão (4.1.2) que define um tensor ortogonal $\underset{\sim}{Q} \in \mathbb{O}$. Admitamos que o tensor $\underset{\sim}{Q}$ é uma função do tempo definida por $\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{Q}(t)$. Derivando (4.1.2) temos

$$\underset{\sim}{Q}\ \underset{\sim}{Q}^T + \underset{\sim}{Q}\ \dot{\underset{\sim}{Q}}^T = 0,$$

onde $\dot{\underset{\sim}{Q}}^T = \dot{\underset{\sim}{Q}}^T$ e portanto,

$$\dot{\underset{\sim}{Q}}\ \underset{\sim}{Q}^T = -\underset{\sim}{Q}\ \dot{\underset{\sim}{Q}}^T = -(\dot{\underset{\sim}{Q}}\ \underset{\sim}{Q}^T)^T .$$

Então, definimos

(10.5.1) $$\underset{\sim}{A} = \dot{\underset{\sim}{Q}}\ \underset{\sim}{Q}^T$$

que é antissimétrico.

Vamos dar uma interpretação a esse tensor antissimétrico no caso de $\underset{\sim}{Q} \in \mathbb{O}^+$. Se em (8.9.2), $W = W(T)$,

$$\dot{\underset{\sim}{Q}} = \dot{\underset{\sim}{W}}\ e^{\underset{\sim}{W}} = \dot{\underset{\sim}{W}}\ \underset{\sim}{Q},$$

(10.5.2) $$\dot{\underset{\sim}{W}} = \dot{\underset{\sim}{Q}}\ \underset{\sim}{Q}^T = \underset{\sim}{A}.$$

Se $\underset{\sim}{Q} \in \mathbb{O}^+$ é representado pela matriz (4.3.1), então

(10.5.3) $$[\dot{W}] = [\dot{Q}][Q^T] =$$

$$= \begin{bmatrix} -\dot{\theta}\ \text{sen}\ \theta & -\dot{\theta}\ \cos\theta & 0 \\ \theta\ \cos\theta & -\dot{\theta}\ \text{sen}\ \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\ \theta & 0 \\ -\text{sen}\ \theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

i.e., a matriz do tensor antissimétrico $\underset{\sim}{A} = \dot{\underset{\sim}{W}}$, de fato obtida derivando (8.9.4), é expressa por

$$(10.5.4) \qquad [\dot{W}] = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta} & 0 \\ \dot{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O tensor $\underset{\sim}{A} = \dot{\underset{\sim}{W}}$ é chamado de <u>tensor velocidade da rotação</u> $\underset{\sim}{Q}$, <u>tensor velocidade angular</u> ou <u>tensor giro</u>. Seu vetor $\dot{\underset{\sim}{w}} = \text{vet}\ \dot{\underset{\sim}{W}}$ que se apoia no eixo da rotação $\underset{\sim}{Q}$ tem os mesmos nomes e é simbolizado por $\underset{\sim}{\omega}$. O módulo de $\underset{\sim}{\omega}$ é a velocidade escalar

$$(10.5.5) \qquad \|\omega\| = \omega = \dot{\theta}.$$

Vamos chegar a uma relação entre $\|\underset{\sim}{\omega}\|$ e $\|\dot{\underset{\sim}{W}}\|$. De (10.5.2) temos

$$(10.5.6) \qquad \dot{\underset{\sim}{W}}\ \dot{\underset{\sim}{W}}^T = \dot{\underset{\sim}{Q}}\ \dot{\underset{\sim}{Q}}^T,$$

portanto, $\text{tr}\ \dot{\underset{\sim}{W}}\ \dot{\underset{\sim}{W}}^T = \text{tr}\ \dot{\underset{\sim}{Q}}\ \dot{\underset{\sim}{Q}}^T$ e

$$(10.5.7) \qquad \|\dot{\underset{\sim}{W}}\| = \|\dot{\underset{\sim}{Q}}\|.$$

Se $\dot{\underset{\sim}{Q}}$ é representado pela primeira matriz do segundo membro de $(10.5.3)_2$, verificamos que $\text{tr}\ \dot{\underset{\sim}{Q}}\ \dot{\underset{\sim}{Q}}^T = 2\ \dot{\theta}^2$ e então,

$$(10.5.8) \qquad \omega = \dot{\theta} = \|\dot{\underset{\sim}{W}}\|/\sqrt{2}.$$

10.6 - <u>Movimento circular de uma partícula</u>.

Como exemplo de derivada de função tensorial de valor escalar, vamos considerar o movimento ao longo de uma trajetória circular de uma partícula animada de velocidade não necessariamente constante. Chamamos de <u>partícula</u> ou de <u>ponto material</u> a

um elemento de matéria de dimensões lineares desprezíveis e que ocupa um ponto de $\mathbb{E}$ chamado de <u>lugar</u> ou de <u>posição</u>. O conjunto dos pontos $\underset{\sim}{x} \in \mathbb{E}$ ocupados por uma partícula com o correr do tempo é uma curva de $\mathbb{E}$ chamada de <u>trajetória</u>.

No presente exemplo, a trajetória é uma circunferência de círculo cujo centro admitimos coincidir com uma origem $\underset{\sim}{0}$ de uma base $\mathbb{B}_{\underset{\sim}{0}} = \{\underset{\sim}{e}_i\}_{\underset{\sim}{0}}$ de $\mathbb{E}$. Os pontos de $\underset{\sim}{x}$ na trajetória são assinalados pelos raios vetores $\underset{\sim}{r} = \underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{0}$.

Se $\underset{\sim}{n}$ é um versor normal ao plano da trajetória, temos

$$\underset{\sim}{r}(t)\cdot\underset{\sim}{n} = 0$$

e derivando,

$$\underset{\sim}{r}(t)\cdot\underset{\sim}{n} = 0,$$

i.e., a <u>velocidade do movimento de rotação</u> da partícula que ocupa no tempo t o ponto $\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{r} + \underset{\sim}{0}$, simbolizada por $\dot{\underset{\sim}{r}}(t) = \dot{\underset{\sim}{x}}(t)$, é perpendicular ao versor $\underset{\sim}{n}$. Por outro lado, derivando a expressão

$$\underset{\sim}{r}(t)\cdot\underset{\sim}{r}(t) = \underset{\sim}{r}^2 = \text{constante},$$

obtemos

$$2\,\dot{\underset{\sim}{r}}(t)\cdot\underset{\sim}{r}(t) = 0,$$

equação que mostra que a velocidade $\dot{r}(t)$ é perpendicular ao raio vetor $\underset{\sim}{r}(t) = \underset{\sim}{x}(t) - \underset{\sim}{0}$. Então, sendo $\underset{\sim}{r}(t)$ perpendicular tanto a $\underset{\sim}{n}$ como a $\underset{\sim}{r}$, é, por conseguinte, paralelo a $\underset{\sim}{n}\times\underset{\sim}{r}$, i.e.,

(10.6.1) $$r(t) = \omega(t)(n \times r(t)) = \omega(t)n \times r(t) = \omega(t) \times r(t)$$

onde $\omega(t)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função escalar e

(10.6.2) $$\underset{\sim}{\omega}(t) = \omega(t)\underset{\sim}{n}$$

é uma função vetorial $\underset{\sim}{\omega}(t)$: $\mathbb{R} \to \mathbb{V}$, cujo valor é o vetor velocidade angular instantânea do movimento de rotação da partícula. Tendo em vista que os vetores $\underset{\sim}{\omega}(t)$ e $\underset{\sim}{r}(t)$ são perpendiculares, de $(10.6.1)_3$ obtemos o módulo $\|\dot{\underset{\sim}{r}}(t)\| = \dot{r}(t)$ dada por

$$\dot{r}(t) = \omega(t)r(t), \tag{10.6.3}$$

onde $\omega(t)$ é expresso por (10.5.9), i.e., por $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$, quando o versor $\underset{\sim}{n} = \underset{\sim}{m} = \underset{\sim}{e}_3$ gera o eixo da rotação $\underset{\sim}{Q} \in \mathcal{O}^+$.

Quanto a aceleração, derivando $(10.6.1)_1$ e usando $(10.6.1)_2$, temos

$$\begin{aligned}\ddot{\underset{\sim}{r}}(t) &= \dot{\omega}(t)(\underset{\sim}{n} \times \underset{\sim}{r}(t)) + \omega(t)(\underset{\sim}{n} \times \dot{\underset{\sim}{r}}(t)) = \\ &= \dot{\omega}(t)(\underset{\sim}{n} \times \underset{\sim}{r}(t)) + \omega^2(t)(\underset{\sim}{n} \times (\underset{\sim}{n} \times \underset{\sim}{r}(t)),\end{aligned} \tag{10.6.4}$$

onde, no segundo membro, a primeira parcela, perpendicular a $\underset{\sim}{r}(t)$ é a <u>aceleração tangencial</u> e a segunda, paralela a $\underset{\sim}{r}(t)$ é a <u>aceleração normal</u>.

Vamos agora abordar esse mesmo exemplo de outro modo. Admitamos que na Fig. 4.10.2 o raio vetor $\underset{\sim}{r}^*(t) = \underset{\sim}{x}^*(t) - \underset{\sim}{O}$ assinala os pontos da trajetória circular de uma partícula e portanto, roda solidário com a base movel $\mathcal{B}^*_{\underset{\sim}{O}} = \{\underset{\sim}{e}^*_i\}$. A velocidade instantânea de rotação da partícula em relação a origem fixa $\underset{\sim}{O}$ é obtida derivando

$$\underset{\sim}{r}^*(t) = \underset{\sim}{Q}(t)\underset{\sim}{r}, \tag{10.6.5}$$

onde $\underset{\sim}{Q} \in \mathcal{O}^+$ descreve uma rotação em torno de um eixo normal ao plano da trajetória. Então, como $\dot{\underset{\sim}{r}} = \underset{\sim}{O}$, temos

$$\dot{\underset{\sim}{r}}^*(t) = \dot{\underset{\sim}{Q}}(t)\underset{\sim}{r} = \dot{\underset{\sim}{Q}}(t)\ \underset{\sim}{Q}^T(r)\ \underset{\sim}{r}^*(t), \tag{10.6.6}$$

ou, de acordo com (10.5.2) e (5.3.1),

$$\dot{r}^*(t) = \dot{W}(t)r^*(t) = \dot{\omega}(t) \times r^*(t), \tag{10.6.7}$$

que é uma expressão idêntica a $(10.6.1)_3$.

Quanto a aceleração, derivando (10.6.7) obtemos

$$\begin{aligned} \ddot{\underset{\sim}{r}}^*(t) &= \dot{\underset{\sim}{W}}(t)\underset{\sim}{r}^*(t) + \ddot{\underset{\sim}{W}}(t)\underset{\sim}{r}^*(t) = \\ &= \underset{\sim}{W}(t)\underset{\sim}{r}^*(t) + \underset{\sim}{W}^2(t)\underset{\sim}{r}^*(t) = \dot{\underset{\sim}{\omega}}(t) \times \underset{\sim}{r}^*(t) + \\ &\quad + \underset{\sim}{\omega}(t) \times (\underset{\sim}{\omega}(t) \times \underset{\sim}{r}^*(t)), \end{aligned} \tag{10.6.8}$$

onde $(10.6.8)_3$ é idêntica a $(10.6.4)_2$.

Se o eixo $(\underset{\sim}{e}_3)_{\underset{\sim}{O}}$ é o eixo da rotação $\underset{\sim}{Q}$, a velocidade instantânea do movimento de rotação da partícula, dada por $(10.6.7)_1$, é expressa matricialmente, usando (10.5.4), por

$$\begin{bmatrix} \dot{r}_1^* \\ \dot{r}_2^* \\ \dot{r}_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta} & 0 \\ \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1^* \\ r_2^* \\ r_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}\, r_2^* \\ \dot{\theta}\, r_1^* \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{10.6.9}$$

Como medida da velocidade angular, o tensor $\dot{\underset{\sim}{W}} = \text{tens}\ \underset{\sim}{\omega}$ é mais geral do que o vetor $\underset{\sim}{\omega}$ porque, esse tensor descreve velocidades angulares em espaços de dimensões diferentes de três, onde não há propriamente um eixo de apio de $\underset{\sim}{\omega}$.

10.7 - Derivada de funções tensoriais de valor escalar.

As funções tensoriais de valor escalar $f: D_X \to \mathbb{R}$ podem ter como elementos do domínio, pontos, vetores ou tensores. Consideremos como exemplo o campo escalar $f: D_{\mathbb{E}} \to \mathbb{R}$ definido

por $k = f(\underset{\sim}{x})$.

Dizemos que esse campo é <u>diferenciável</u> em um ponto $\underset{\sim}{x} \in D_{\mathbb{E}}$ quando em relação a um vetor tangente $\underset{\sim}{u}_{\underset{\sim}{x}} = (\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{u}) \in \mathbb{E}_{\underset{\sim}{x}}$, existe o limite

$$(10.7.1) \qquad \delta k = f'(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{u}) = \lim_{n\to 0} \frac{1}{n} (f(\underset{\sim}{x} + n\underset{\sim}{u}) - f(x)) = \frac{d}{dn} f(\underset{\sim}{x} + n\underset{\sim}{u})\Big|_{n=0}$$

para qualquer $n \in \mathbb{R}$. Esse limite $\delta k = f'(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{u}) = f'(\underset{\sim}{u}_{\underset{\sim}{x}})$, chamado de <u>diferencial total</u> ou de <u>primeira aproximação</u> de f no ponto $\underset{\sim}{x}$ em relação ao <u>incremento</u> $\underset{\sim}{u}$ (parte vetorial de $\underset{\sim}{u}_{\underset{\sim}{x}}$) é uma forma linear nesse incremento, i.e.,

$$(10.7.2) \qquad \begin{cases} f'(\underset{\sim}{u} + \underset{\sim}{v})_{\underset{\sim}{x}} = f'(\underset{\sim}{u}_{\underset{\sim}{x}}) + f'(\underset{\sim}{v}_{\underset{\sim}{x}}), \\ f'(c\,\underset{\sim}{u}_{\underset{\sim}{x}}) = c\, f'(\underset{\sim}{u}_{\underset{\sim}{x}}), \end{cases}$$

para quaisquer $\underset{\sim}{u}_{\underset{\sim}{x}}, \underset{\sim}{v}_{\underset{\sim}{x}} \in \mathbb{E}_{\underset{\sim}{x}}$ e $c \in \mathbb{R}$. Então, o diferencial total pode ser expresso por

$$(10.7.3) \qquad \delta k = f'(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{u}) = f'(\underset{\sim}{x})\underset{\sim}{u}$$

definindo a função $f'(\underset{\sim}{x})$, chamada de <u>derivada</u> ou de <u>tangente</u> da função $k = f(\underset{\sim}{x})$. A função derivada transforma linearmente o vetor $\underset{\sim}{u} \in V$ no escalar $\delta k \in \mathbb{R}$, i.e., temos a função linear

$$(10.7.4) \qquad f'(\underset{\sim}{x}): V \to \mathbb{R}$$

que, lineariza no ponto $\underset{\sim}{x}$ a função $k = f(\underset{\sim}{x})$.

Podemos estender diretamente essas definições e conceitos às funções escalares cujos domínios são conjuntos de vetores ou de tensores. Assim, existindo o limite análogo a $(10.7.1)_2$,

o diferencial total de $k = f(\underset{\sim}{v})$ é dado por

$$(10.7.5) \qquad \delta k = f'(\underset{\sim}{v},\underset{\sim}{u}) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(f(\underset{\sim}{v} + h\underset{\sim}{u}) - f(\underset{\sim}{v})\right) = \frac{d}{dh} f(\underset{\sim}{v} + h\underset{\sim}{u})\Big|_{h=0},$$

e o de $k = f(\underset{\sim}{T})$ por

$$(10.7.6) \qquad \delta k = f'(\underset{\sim}{T},\underset{\sim}{C}) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(f(\underset{\sim}{T} + h\underset{\sim}{C}) - f(\underset{\sim}{T})\right) = \frac{d}{dh} f(\underset{\sim}{T} + h\underset{\sim}{C})\Big|_{h=0},$$

onde o ponto e o incremento são, respectivamente, os tensores $\underset{\sim}{T},\underset{\sim}{C} \in \mathbb{L}$. As derivadas são as funções lineares $f'(\underset{\sim}{v}): V \to \mathbb{R}$, $f'(\underset{\sim}{T}): \mathbb{L} \to \mathbb{R}$, definidas, respectivamente, por

$$(10.7.7) \qquad \delta k = f'(\underset{\sim}{v},\underset{\sim}{u}) = f'(\underset{\sim}{v})\underset{\sim}{u},$$

$$(10.7.8) \qquad \delta k = f'(\underset{\sim}{T},\underset{\sim}{C}) = f'(\underset{\sim}{T})\underset{\sim}{C}.$$

10.8 - Gradiente e derivadas parciais de funções tensoriais de valor escalar.

A derivada de funções escalares sendo uma forma linear, é representada por um produto interno. Por exemplo, no caso de campo escalar, a relação

$$(10.8.1) \qquad f'(\underset{\sim}{x})\underset{\sim}{u} = \nabla f(\underset{\sim}{x}) \cdot \underset{\sim}{u},$$

define o vetor únioo $\nabla f(\underset{\sim}{x})$ chamado de gradiente do campo escalar no ponto $\underset{\sim}{x}$. O vetor $\nabla f(\underset{\sim}{x})$ do espaço de translação de $\mathbb{E}$ é também simbolizado por $\text{grad } f(\underset{\sim}{x})$ ou por $\frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{x}}(\underset{\sim}{x})$.

as derivadas parciais do campo escalar, definidas por

$$(10.8.2)\qquad f'(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{e}_i) = f'(\underset{\sim}{x})\underset{\sim}{e}_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underset{\sim}{x}) = f(\underset{\sim}{x}),i = \partial_i f(\underset{\sim}{x})$$

são, de acordo com

$$(10.8.3)\qquad f'(\underset{\sim}{x})\underset{\sim}{e}_i = \nabla f(\underset{\sim}{x})\cdot\underset{\sim}{e}_i = (\nabla f(\underset{\sim}{x}))_i,$$

os componentes do vetor gradiente na base $\mathbb{B}_{\underset{\sim}{x}} = \{\underset{\sim}{e}_i\}_{\underset{\sim}{x}}$.

Comparando a derivada com o gradiente de um campo escalar vemos que enquanto a derivada é a função linear $f'(\underset{\sim}{x}): V \to \mathbb{R}$ o gradiente é um vetor tangente de $\mathbb{E}_{\underset{\sim}{x}}$ que tem $\underset{\sim}{x}$ como ponto de aplicação. Em cada ponto $\underset{\sim}{x} \in \mathbb{E}$, existe uma derivada e um gradiente que, consideradas como funções de $\underset{\sim}{x}$ são, em geral, funções não-lineares, que podem ser simbolizadas, respectivamente, por

$$(10.8.4)\qquad f'(\underset{\sim}{x}): D_{\mathbb{E}} \to \mathbb{L}(V,\mathbb{R}),$$

$$(10.8.5)\qquad \nabla f(\underset{\sim}{x}): D_{\mathbb{E}} \to V .$$

Então, o valor da função derivada pode ser considerado como um vetor do espaço linear tridimensional $\mathbb{L}(V,\mathbb{R})$ que é isomorfo ao espaço V.

Esses conceitos podem ser estendidos às funções escalares cujos argumentos são vetores ou tensores. Por exemplo, o gradiente da função $k = f(\underset{\sim}{T})$ é o tensor $\nabla f(\underset{\sim}{T})$ definido pelo produto escalar

$$(10.8.6)\qquad f'(\underset{\sim}{T})\underset{\sim}{C} = \nabla f(\underset{\sim}{T})\cdot\underset{\sim}{C} = tr(\nabla f(\underset{\sim}{T})\underset{\sim}{C}^T) = tr(\nabla f(\underset{\sim}{T})^T\underset{\sim}{C}),$$

e também simbolizado por $\frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{T}}(\underset{\sim}{T})$.

As derivadas parciais da função $k = f(\underset{\sim}{T})$ são definidas

por

$$(10.8.7)\qquad f'(\underset{\sim}{T},\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j) = f'(\underset{\sim}{T})\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j = \nabla f(\underset{\sim}{T})\cdot\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j =$$

$$= (\nabla f(\underset{\sim}{T}))_{ij} = \frac{\partial f}{\partial T_{ij}}(\underset{\sim}{T}).$$

Em cada ponto $\underset{\sim}{T}$, o gradiente $\nabla f(\underset{\sim}{T})$ pode ser considerado como um vetor do espaço $\mathbb{L}(V,V) = V \otimes V$ de nove dimensões. Como função de $\underset{\sim}{T}$, o gradiente é a função $\nabla f(T)\colon D_{V\otimes V} \to V\otimes V$.

A derivada de $k = f(\underset{\sim}{T})$ é a função $f'(T)\colon D_{V\otimes V} \to \mathbb{L}(V\otimes V,\mathbb{R})$, cujo valor em um ponto $\underset{\sim}{T}$ é um vetor do espaço $\mathbb{L}(V\otimes V,\mathbb{R})$ de nove dimensões, isomorfo ao espaço $\mathbb{L}(V,V)$.

10.9 - Derivada direcional.

Consideremos um campo escalar $f\colon D_{\mathbb{E}} \to \mathbb{R}$ e um versor tangente $\underset{\sim}{n}_{\underset{\sim}{x}} = (\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{n}) \in \mathbb{E}_{\underset{\sim}{x}}$. A <u>derivada direcional</u> de f na direção $\underset{\sim}{n}$, df/ds, é definida por

$$(10.9.1)\qquad \frac{df}{ds} = f'(\underset{\sim}{x},n) = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\,(f(\underset{\sim}{x} + s\underset{\sim}{n}) - f(\underset{\sim}{x})) =$$

$$= \frac{d}{ds}\,f(\underset{\sim}{x} + s\underset{\sim}{n})\Big|_{s=0} = f'(\underset{\sim}{x})\underset{\sim}{n},$$

onde s é a distância ao longo da reta que passa pelo ponto $\underset{\sim}{x}$. Essa derivada mede a razão de variação do campo escalar com a distância s. As derivadas parciais são derivadas direcionais nas direções dos versores base $\underset{\sim}{e}_i$.

De acordo com a definição de gradiente, (10.9.1), temos

(10.9.2) $$\frac{df}{ds} = \nabla f(\underset{\sim}{x})\cdot\underset{\sim}{n} = \|\nabla f(\underset{\sim}{x})\| \cos(\nabla f(\underset{\sim}{x}),\underset{\sim}{n}).$$

Daí concluimos que o campo escalar varia mais rapidamente com a distância na direção do vetor $\nabla f(\underset{\sim}{x})$ e que a maior razão de variação é dada por $\|\nabla f(\underset{\sim}{x})\|$. Em qualquer outra direção $\underset{\sim}{n}$, df/ds é a projeção de $\nabla f(\underset{\sim}{x})$ nessa direção.

10.10 - Gradientes dos momentos e dos invariantes principais.

Como exemplos de gradientes de funções escalares de um tensor, consideremos os dos momentos,

(10.10.1) $$f(\underset{\sim}{T}) = \bar{I}_k = \operatorname{tr} \underset{\sim}{T}^k \qquad (k = 1,2,3).$$

De acordo com (10.7.6) e (10.8.6) o diferencial total é dado por

(10.10.2) $$\operatorname{tr}\left(\frac{\partial \operatorname{tr} \underset{\sim}{T}^k}{\partial \underset{\sim}{T}}\right)^T \underset{\sim}{C} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\operatorname{tr}(\underset{\sim}{T} + h\underset{\sim}{C})^k - \operatorname{tr} \underset{\sim}{T}^k\right).$$

Expandindo $(\underset{\sim}{T} + h\underset{\sim}{C})^k$ segundo a fórmula do binômio, temos

$$\operatorname{tr}(T + hC)^k = \operatorname{tr}\left(T^k + h\,k\,T^{k-1}C + \frac{1}{2}h^2 k\,(k-1)T^{k-2} + \ldots + h^{k-1}\,C^k\right) =$$

$$= \operatorname{tr} \underset{\sim}{T}^k + h\,k\,\operatorname{tr}(\underset{\sim}{T}^{k-1}\,\underset{\sim}{C}) + h^2\,(\ldots)\,.$$

Então, substituindo esse resultado em (10.10.2), temos,

$$\operatorname{tr}\left(\frac{\partial \operatorname{tr} \underset{\sim}{T}^k}{\partial \underset{\sim}{T}}\right)^T C = k \operatorname{tr} T^{k-1}\,\underset{\sim}{C}.$$

Como $\underset{\sim}{C}$ é um tensor arbitrário, resulta,

(10.10.3) $$\frac{\partial \bar{I}_k}{\partial \underset{\sim}{T}}(\underset{\sim}{T}) = \frac{\partial \operatorname{tr} \underset{\sim}{T}^k}{\partial \underset{\sim}{T}} = k(T^{k-1})^T.$$

Então, temos os gradientes dos momentos

$$(10.10.4)\qquad \begin{cases} \partial \bar{I}_1/\partial \underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{1}, \\ \partial \bar{I}_2/\partial \underset{\sim}{T} = 2\ \underset{\sim}{T}^T \\ \partial \bar{I}_3/\partial \underset{\sim}{T} = 3(\underset{\sim}{T}^2)^T, \end{cases}$$

e, em componentes,

$$(10.10.5)\qquad \begin{cases} \partial \bar{I}_1/\partial T_{ij} = \delta_{ij}, \\ \partial \bar{I}_2/\partial T_{ij} = 2\ T_{ji}, \\ \partial \bar{I}_3/\partial T_{ij} = 3\ T_{jk}\ T_{ki}. \end{cases}$$

Quanto aos invariantes principais, usando as equações (6.2.11), temos,

$$(10.10.6)\qquad \begin{cases} \partial I_1/\partial \underset{\sim}{T} = \partial \bar{I}_1/\partial \underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{1}, \\ \partial I_2/\partial \underset{\sim}{T} = (\underset{\sim}{1}\ \mathrm{tr}\ \underset{\sim}{T} - \underset{\sim}{T})^T \\ \partial I_3/\partial \underset{\sim}{T} = (\underset{\sim}{T}^2 - I_1 \underset{\sim}{T} + I_2 \underset{\sim}{1})^T. \end{cases}$$

Usando a equação de Hamilton-Cayley (6.2.12), vemos que em $(10.10.6)_3$,

$$(10.10.7)\qquad \underset{\sim}{T}^2 - I_1\ \underset{\sim}{T} + I_2\ \underset{\sim}{1} = I_3\ \underset{\sim}{T}^{-1},$$

portanto,

$$(10.10.8)\qquad \partial I_3/\partial \underset{\sim}{T} = \partial \det \underset{\sim}{T}/\partial \underset{\sim}{T} = I_3 (T^{-1})^T = (\underset{\sim}{T}^{-1})^T \det \underset{\sim}{T},$$

ou, de acordo com $(5.5.6)_1$,

$$(10.10.9)\qquad \partial \det \underset{\sim}{T}/\partial \underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{C},$$

onde $\underset{\sim}{C}$ é o tensor cofator de $\underset{\sim}{T}$.

Como um exercício, consideremos a função composta de valor escalar $f = \mathrm{tr}\ \underset{\sim}{T}(t)$, i.e., o escalar f é função do ten-

sor $\underset{\sim}{T}$ que por sua vez é função do tempo t. Aplicando (10.10.3) e $(10.10.6)_1$ temos

$$(10.10.10) \qquad f = \overset{\cdot}{\operatorname{tr}\, \underset{\sim}{T}(t)} = \nabla \operatorname{tr} \underset{\sim}{T}\cdot\dot{\underset{\sim}{T}} = \underset{\sim}{1}\cdot\dot{\underset{\sim}{T}} = \operatorname{tr} \dot{\underset{\sim}{T}}.$$

Por exemplo, se em (10.5.9) o ângulo θ da rotação $\underset{\sim}{Q} \in \mathcal{O}^+$ é função do tempo, então a velocidade escalar angular é

$$(10.10.11) \qquad \omega = \dot{\theta} = (1/2)\,|\operatorname{tr} \dot{Q}/\operatorname{sen}\theta|,$$

conforme pode ser verificado também por (10.5.3) e (10.5.5). Também, se $f = \det \underset{\sim}{T}(t)$, podemos verificar facilmente que

$$(10.10.12) \qquad \overset{\cdot}{\det \underset{\sim}{T}(t)} = \det \underset{\sim}{T}\, \operatorname{tr} \underset{\sim}{T}^{-1}\, \dot{\underset{\sim}{T}},$$

i.e.,

$$(10.10.13) \qquad \overset{\cdot}{\ell n \det \underset{\sim}{T}(t)} = \operatorname{tr} \underset{\sim}{T}^{-1}\, \dot{\underset{\sim}{T}}.$$

10.11 - Gradiente de invariantes de um tensor simétrico.

Os invariantes (ortogonais) de um tensor simétrico são as funções escalares isotrópicas

$$(10.11.1) \qquad k = f(\underset{\sim}{S}),$$

que, de acordo com $(9.5.6)_3$ podem ser representadas por

$$(10.11.2) \qquad f(\underset{\sim}{S}) = \psi(I_1, I_2, I_3).$$

Aplicando a regra de diferenciação em cadeia em (10.11.2), temos,

$$(10.11.3) \qquad \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{S}} = \frac{\partial \psi}{\partial I_1}\frac{\partial I_1}{\partial \underset{\sim}{S}} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2}\frac{\partial I_2}{\partial \underset{\sim}{S}} + \frac{\partial \psi}{\partial I_3}\frac{\partial I_3}{\partial \underset{\sim}{S}}.$$

Nesse caso em que $\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{S}$ é um tensor simétrico, temos de (10.10.6),

$$(10.11.4)\qquad \begin{cases} \partial I_1/\partial \underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{1}, \\ \partial I_2/\partial \underset{\sim}{S} = I_1 \underset{\sim}{1} - \underset{\sim}{S}, \\ \partial I_3/\partial \underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{S}^2 - I_1 \underset{\sim}{S} + I_2 \underset{\sim}{1}. \end{cases}$$

Portanto,

$$(10.11.5)\qquad \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{S}} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial I_1} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2} I_1 + \frac{\partial \psi}{\partial I_3} I_2\right)1 - \left(\frac{\partial \psi}{\partial I_2} + \frac{\partial \psi}{\partial I_3} I_1\right)S + \frac{\partial \psi}{\partial I_3} S^2.$$

Usando (10.10.7), temos

$$(10.11.6)\qquad \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{S}} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial I_1} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2} I_1\right)1 - \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \underset{\sim}{S} + \frac{\partial \psi}{\partial I_3} I_3 \underset{\sim}{S}^{-1}.$$

A partir da representação $(9.5.6)_4$, i.e., a partir de

$$(10.11.7)\qquad f(\underset{\sim}{S}) = \chi(\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_3),$$

obtemos, usando as equações (10.10.5) o resultado

$$(10.11.8)\qquad \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{S}} = \frac{\partial \chi}{\partial \bar{I}_1}\underset{\sim}{1} + 2\frac{\partial \chi}{\partial \bar{I}_2} \underset{\sim}{S} + 3\frac{\partial \chi}{\partial \bar{I}_3} S^2 .$$

Tendo em vista que o gradiente de uma função escalar de um tensor é uma função tensorial de um tensor, verificamos que as equações (10.11.5) e (10.11.8) são da forma (8.4.8) e a equação (10.1.6) é da forma (8.4.9), formas essas que representam as funções isotrópicas $\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{S})$.

10.12 - Isotropia da função gradiente.

De um modo geral, o gradiente de uma função tensorial isotrópica também é uma função tensorial isotrópica.

Vamos mostrar isso para o caso de uma função escalar isotrópica de um tensor (invariante ortogonal). Se a função $k = f(\underset{\sim}{T})$ é isotrópica, de (10.8.6), temos,

$$\text{tr } \nabla f(\underset{\sim}{T})\underset{\sim}{C}^T = \text{tr } \nabla f(\underset{\sim}{Q}\ \underset{\sim}{T}\ \underset{\sim}{Q}^T)\underset{\sim}{Q}\ \underset{\sim}{C}^T\ \underset{\sim}{Q}^T =$$

$$= \text{tr } \underset{\sim}{Q}^T \nabla f(\underset{\sim}{Q}\ \underset{\sim}{T}\ \underset{\sim}{Q}^T)\underset{\sim}{Q}\ \underset{\sim}{C}^T,$$

ou, como $\underset{\sim}{C}$ é arbitrário,

$$\nabla f(\underset{\sim}{T}) = \underset{\sim}{Q}^T \nabla f(\underset{\sim}{Q}\ \underset{\sim}{T}\ \underset{\sim}{Q}^T)\underset{\sim}{Q}.$$

Então,

$$\underset{\sim}{Q}\ \nabla f(\underset{\sim}{T})\underset{\sim}{Q}^T = \nabla f(\underset{\sim}{Q}\ \underset{\sim}{T}\ \underset{\sim}{Q}^T), \tag{10.12.1}$$

mostrando que o gradiente é também uma função isotrópica.

10.13 - Gradiente da deformação.

Já consideramos as derivadas das funções de argumento escalar $\mathfrak{F}: D_{\mathbb{R}} \to \mathbb{Y}$ e as derivadas e gradientes de funções $f: D_{\mathbb{X}} \to \mathbb{R}$ de valor escalar. Consideremos agora as funções $\mathfrak{F}: D_{\mathbb{X}} \to \mathbb{Y}$ cujos valores e argumentos podem ser pontos, vetores ou tensores. Um exemplo concreto é a função $\underset{\sim}{\chi}: D_{\mathbb{E}} \to \mathbb{E}$ definida por $\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{\chi}(\underset{\sim}{x})$ chamada de deformação do espaço.

Quando essa função é diferenciável no ponto $\underset{\sim}{x} \in D_{\mathbb{E}}$,

o diferencial total, definido como em (10.7.1) é a função linear

$$(10.13.1)\qquad \delta\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{\chi}'(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{u}) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\underset{\sim}{\chi}(\underset{\sim}{x}+h\underset{\sim}{u}) - \underset{\sim}{\chi}(\underset{\sim}{x})\right) = \frac{d}{dh}\underset{\sim}{\chi}(\underset{\sim}{x}+h\underset{\sim}{u})\Big|_{h=0},$$

cujo valor $\delta\underset{\sim}{x}$ é uma diferença pontual e, portanto, um vetor do espaço tangente de $\mathbb{E}$.

Não existe para as funções cujos valores não são escalares uma representação por produto interno tal como a que em (10.8.1) deu origem a definição de gradiente em contraste com a derivada. É usual entretanto chamar de gradiente a derivada das funções tensoriais cujos valores não são escalares.

No presente exemplo, o gradiente da deformação é o tensor $\nabla\underset{\sim}{\chi}(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x})\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$, definido por

$$(10.13.2)\qquad \delta\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{\chi}'(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{u}) = \nabla\underset{\sim}{\chi}(\underset{\sim}{x})\underset{\sim}{u} = \frac{\partial\underset{\sim}{\chi}}{\partial\underset{\sim}{x}}(\underset{\sim}{x})\underset{\sim}{u},$$

que transforma linearmente, no ponto $\underset{\sim}{x}$, o vetor incremento $\underset{\sim}{u}$ no vetor $\delta\underset{\sim}{x}$ (Fig. 10.2.1) e, é chamado de deformação local.

O cálculo das funções tensoriais em geral, a menos da ordem tensorial dos seus argumentos e valores e de seus respectivos símbolos e nomes, é análogo ao cálculo de funções escalares de um argumento escalar. Por exemplo, se a deformação $\underset{\sim}{\chi}$ é a composição das deformações $\underset{\sim}{\chi}_1$ e $\underset{\sim}{\chi}_2$, i.e., se

$$(10.13.3)\qquad \underset{\sim}{\chi}(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{\chi}_2(\underset{\sim}{\chi}_1(\underset{\sim}{x})),$$

então, pela regra de diferenciação em cadeia, temos

$$(10.3.4)\qquad \nabla\underset{\sim}{\chi}(\underset{\sim}{x}) = (\nabla\underset{\sim}{\chi}_2(\underset{\sim}{\chi}_1(\underset{\sim}{x}))\nabla\underset{\sim}{\chi}_1(\underset{\sim}{x}).$$

Pela mesma regra, se $\underset{\sim}{f}$ é uma função vetorial de $\underset{\sim}{v}$ e $\underset{\sim}{v}$ é

uma função escalar de t, então, temos

$$(10.13.5) \qquad \underset{\sim}{f} = \frac{d}{dt}\,\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{v}(t)) = \underset{\sim}{f}'(\underset{\sim}{v},\underset{\sim}{v}) = \underset{\sim}{f}'(\underset{\sim}{v})\underset{\sim}{v},$$

onde $\underset{\sim}{f}'(\underset{\sim}{v},\underset{\sim}{v})$ é o diferencial total da função composta $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{v}(t))$ no ponto $\underset{\sim}{v}$ em relação ao incremento $\underset{\sim}{v}$ e $\underset{\sim}{f}'(\underset{\sim}{v})$ é a derivada de $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{v})$. Em (10.13.5) simbolizamos a função de t por seu valor $\underset{\sim}{v}$, escrevendo $\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{v}(t)$.

Considerado como função de $\underset{\sim}{x}$, o tensor deformação local é a função, em geral não-linear, $\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x})\colon D_{\mathbb{E}} \to \mathbb{L}(V,V)$.

10.14 - Derivadas parciais da deformação.

O diferencial total (10.13.1) é um vetor $\delta\underset{\sim}{x}$ cujos componentes dados por

$$(10.14.1) \qquad \delta x_i = \underset{\sim}{\chi}'(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{u})\cdot\underset{\sim}{e}_i = \chi(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{u})_i,$$

são, em cada ponto $\underset{\sim}{x}$, funções escalares de um vetor $\underset{\sim}{u}$. As derivadas parciais dessas funções escalares, componentes do gradiente da deformação, são definidas como em (10.8.7), por

$$(10.14.2) \qquad \chi'_i(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{e}_j) = \nabla\chi(\underset{\sim}{x})\cdot\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j = \frac{\partial}{\partial x_j}\chi(\underset{\sim}{x})_i = \chi(\underset{\sim}{x})_{i,j} =$$

$$= \partial_j \chi(\underset{\sim}{x})_i.$$

A matriz

$$(10.14.3)\quad [\nabla \underset{\sim}{\chi}(\underset{\sim}{x})] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \chi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \chi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \chi_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \chi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \chi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \chi_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \chi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \chi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \chi_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = [\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x})],$$

é ohamada de matriz jacobiana da deformação. A propriedade $\det[\underset{\sim}{F}] \neq 0$ assegura a existênoia de $\underset{\sim}{F}^{-1}$ em $\underset{\sim}{x}$.

10.15 - Divergência e rotacional da deformação.

Os nove componentes de $\nabla \underset{\sim}{\chi}(\underset{\sim}{x})$ fornecem informações completas sobre a variação da deformação $\underset{\sim}{\chi}$ nas vizinhanças do ponto $\underset{\sim}{x}$. Em certos casos, entretanto, só temos um conhecimento parcial do gradiente, dado pelas funções chamadas de divergência e rotacional da deformação.

Desdobrando no ponto $\underset{\sim}{x}$ o tensor $\nabla \underset{\sim}{\chi}(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x})$ nas suas parcelas simétrica e antissimétrica temos

$$(10.15.1)\quad \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x}) = \frac{1}{2}\,(\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x})+\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x})^T) + \frac{1}{2}\,(\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x})-\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x})^T) =$$

$$= \text{sim}\ \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x}) + \text{ant}\ \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{S}^{\underset{\sim}{F}}(\underset{\sim}{x}) + \underset{\sim}{W}^{\underset{\sim}{F}}(\underset{\sim}{x})\ .$$

A divergência da deformação é o escalar definido por

$$(10.15.2)\quad \text{div}\ \underset{\sim}{\chi}(\underset{\sim}{x}) = \text{tr}\ \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x}) = \chi(\underset{\sim}{x})_{i,i} = \text{tr}\ \underset{\sim}{S}^{\underset{\sim}{F}}(\underset{\sim}{x}).$$

Como função de $\underset{\sim}{x}$, a divergência da deformação é o campo escalar

(10.15.3) $\qquad \operatorname{div} \underset{\sim}{\chi}(\underset{\sim}{x}) : D_{\mathbb{E}} \to \mathbb{R}.$

O <u>rotacional</u> da deformação é definido no ponto $\underset{\sim}{x}$ como o dobro do vetor do tensor $\nabla\underset{\sim}{\chi}(\underset{\sim}{x})$, i.e., de acordo com (5.3.1), temos

(10.15.4) $\qquad \operatorname{rot} \chi(x)\times u = 2\, W(x)u = 2 \operatorname{ant} F(x)u,$

para qualquer $\underset{\sim}{u} \in V$. Como função de $\underset{\sim}{x}$, o rotacional da deformação é o campo vetorial

(10.15.5) $\qquad \operatorname{rot} \underset{\sim}{\chi}(\underset{\sim}{x}) : D_{\mathbb{E}} \to V.$

De acordo com (5.3.2) os componentes de $\operatorname{rot} \underset{\sim}{\chi}(\underset{\sim}{x})$ são dados por

(10.15.6) $\qquad (\operatorname{rot} \underset{\sim}{\chi}(\underset{\sim}{x}))_i = e_{ijk}\, \chi_{k,j} = e_{ijk}\, \partial_j\, \chi_k .$

A parcela simétrica de (10.15.1)

(10.15.7) $\qquad \nabla\underset{\sim}{\chi}(\underset{\sim}{x}) = (\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x}) + \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x})^T)/2,$

é chamada de <u>gradiente simétrico</u> da deformação.

10.16 - <u>Operador diferencial simbólico</u>.

Em (10.8.1) definimos o vetor $\nabla f(\underset{\sim}{x})$, gradiente do campo escalar, que, sendo um vetor pode ser expresso como uma combinação linear em relação a uma base $\mathcal{B} = \{\underset{\sim}{e}_i\}$, i.e.,

(10.16.1) $\qquad \nabla f(\underset{\sim}{x}) = (\nabla f(\underset{\sim}{x}))_i\, \underset{\sim}{e}_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\underset{\sim}{x})\underset{\sim}{e}_i = f_{,i}(\underset{\sim}{x})\underset{\sim}{e}_i =$

$$= \partial_i\, f(\underset{\sim}{x})\underset{\sim}{e}_i = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\underset{\sim}{x})\underset{\sim}{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underset{\sim}{x})\underset{\sim}{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}(\underset{\sim}{x})\underset{\sim}{e}_3 .$$

Nessa expressão identificamos um operador diferencial

$$(10.16.2) \qquad \nabla = \frac{\partial}{\partial x_1} \underset{\sim}{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \underset{\sim}{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \underset{\sim}{e}_3 = \partial_i \underset{\sim}{e}_i .$$

Esse operador comporta-se como um vetor $\underset{\sim}{\nabla}$ de componentes $\partial_i = \partial/\partial x_i$ que transforma o campo escalar de acordo com

$$(10.16.3) \qquad \underset{\sim}{\nabla} f(\underset{\sim}{x}) = (\frac{\partial}{\partial x_i} \underset{\sim}{e}_i) f(\underset{\sim}{x}) = (\partial_i \underset{\sim}{e}_i) f(\underset{\sim}{x}).$$

Então, se $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}): D_{\mathbb{E}} \to \mathbb{V}$ é um campo vetorial, verificamos que as funções grad, div e rot podem ser expressas simbolicamente por

$$(10.16.4) \qquad \text{grad } \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{\nabla} \otimes \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}),$$

$$(10.16.5) \qquad \text{div } \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{\nabla} \cdot \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}),$$

$$(10.16.6) \qquad \text{rot } \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{\nabla} \times \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}).$$

10.17 - Gradiente de campo tensorial.

Consideremos o campo tensorial $\underset{\sim}{F}: D_{\mathbb{E}} \to \mathbb{L}$ definido por $\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x})$. O gradiente é a transformação linear $\nabla \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x}): \mathbb{V} \to \mathbb{L}$, definida por

$$(10.17.1) \qquad \delta \underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{F}'(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{u}) = \nabla \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x}) \underset{\sim}{u},$$

onde o diferencial total é dado por expressão análoga a (10.7.1). Como função de $\underset{\sim}{x}$ o gradiente do campo tensorial $\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x})$ é a função $\nabla \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x}): D_{\mathbb{E}} \to \mathbb{L}(\mathbb{V},\mathbb{L})$, onde $\mathbb{L}(\mathbb{V},\mathbb{L})$ é um espaço vetorial de 27 dimensões.

Os componentes do diferencial total dados por

$$(10.17.2) \qquad \delta H_{ij} = \underset{\sim}{F}'(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{u})\cdot\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j = F'(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{u})_{ij}$$

são funções escalares do vetor $\underset{\sim}{u}$. As derivadas parciais de $\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T})$ componentes do vetor $\nabla\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x}) \in L(\mathbb{V},\mathbb{L})$ são dados por

$$(10.17.3) \qquad F'(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{u})_{ij} = \underset{\sim}{e}_i\cdot(\nabla\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x})\underset{\sim}{e}_k)\underset{\sim}{e}_j = \frac{\partial}{\partial x_k} F(\underset{\sim}{x})_{ij} = F(\underset{\sim}{x})_{ij,k}.$$

10.18 - Divergência e rotacional de campos tensoriais.

A divergência do campo $\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x})$ no ponto $\underset{\sim}{x}$ é o vetor único que tem a propriedade:

$$(10.18.1) \qquad (\operatorname{div}\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x}))\cdot\underset{\sim}{a} = \operatorname{div}(\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x})^T\underset{\sim}{a}),$$

para qualquer vetor fixo $\underset{\sim}{a} \in \mathbb{V}$. De acordo com (10.16.1), os componentes dessa divergência são

$$(10.18.2) \qquad (\operatorname{div}\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x}))_i = F(\underset{\sim}{x})_{ij,j} = \frac{\partial}{\partial x_j} F(\underset{\sim}{x})_{ij} = \partial_j F(\underset{\sim}{x})_{ij}.$$

O rotacional do campo tensorial no ponto $\underset{\sim}{x}$ é o tensor único que tem a propriedade expressa por

$$(10.18.3) \qquad (\operatorname{rot}\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x}))\underset{\sim}{a} = \operatorname{rot}(\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x})^T\underset{\sim}{a}),$$

para todo vetor $\underset{\sim}{a} \in \mathbb{V}$. Os componentes desse rotacional são

$$(10.18.4) \qquad (\operatorname{rot}\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x}))_{ij} = \varepsilon_{imk} F(\underset{\sim}{x})_{jk,m}.$$

10.19 - Laplacianos de campos tensoriais.

O laplaciano de um campo escalar é a função de valor escalar definida por

$$\Delta f(\underset{\sim}{x}) = \operatorname{div} \nabla f(\underset{\sim}{x}), \tag{10.19.1}$$

ou, em componentes, por

$$\Delta f(\underset{\sim}{x}) = f(\underset{\sim}{x})_{,ii} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\underset{\sim}{x}). \tag{10.19.2}$$

O laplaciano de um campo vetorial $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x})$ é a função de valor vetor definida por

$$\Delta \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}) = \operatorname{div} \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}), \tag{10.19.3}$$

cujos componentes são

$$(\Delta \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{x}))_i = f_{i,jj} = \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} f(\underset{\sim}{x})_i. \tag{10.19.4}$$

O laplaciano de um campo tensorial é o tensor único que para qualquer $\underset{\sim}{a} \in V$ tem a propriedade

$$(\Delta \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x}))\underset{\sim}{a} = \Delta(\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x})\underset{\sim}{a}) \tag{10.19.5}$$

e cujos componentes são

$$(\Delta \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x}))_{ij} = F(\underset{\sim}{x})_{ij,kk} = \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} F(\underset{\sim}{x})_{ij}. \tag{10.19.6}$$

10.20 - Identidades de campos tensoriais.

Nas fórmulas abaixo, simbolizamos os campos tensoriais $f = f(\underset{\sim}{x})$, $\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{v}(\underset{\sim}{x})$ e $\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{H}(\underset{\sim}{x})$ pelos seus respectivos valores e omitimos a referência ao ponto $\underset{\sim}{x}$. Todos os campos são de classe C^2 em seus respectivos domínios $D_{\mathbb{E}}$.

(10.20.1) $$\nabla(\underset{\sim}{u}\times\underset{\sim}{v}) = \nabla\underset{\sim}{u}\times\underset{\sim}{v} - \nabla\underset{\sim}{v}\times\underset{\sim}{u},$$

(10.20.2) $$\operatorname{rot} f\underset{\sim}{v} = \nabla f \times \underset{\sim}{v} + f \operatorname{rot} \underset{\sim}{v},$$

(10.20.3) $$\operatorname{rot} \underset{\sim}{v}\times\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{u}\cdot\nabla\underset{\sim}{v} - \nabla\underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{u},$$

(10.20.4) $$\operatorname{div}(k\underset{\sim}{v}) = f \operatorname{div} \underset{\sim}{v} + \underset{\sim}{v}\cdot\nabla f,$$

(10.20.5) $$\operatorname{div}(\underset{\sim}{u}\times\underset{\sim}{v}) = \underset{\sim}{v}\cdot\operatorname{rot} \underset{\sim}{u} - \underset{\sim}{u}\cdot\operatorname{rot} \underset{\sim}{v},$$

(10.20.6) $$\operatorname{rot}(\underset{\sim}{u}\times\underset{\sim}{v}) = \underset{\sim}{v}\cdot\nabla\underset{\sim}{u} - \underset{\sim}{u}\cdot\nabla\underset{\sim}{v} + \underset{\sim}{u} \operatorname{div} \underset{\sim}{v} - \underset{\sim}{v} \operatorname{div} \underset{\sim}{u}$$

(10.20.7) $$\nabla(\underset{\sim}{u}\cdot\underset{\sim}{v}) = \underset{\sim}{u}\cdot\nabla\underset{\sim}{v} + \underset{\sim}{v}\cdot\nabla\underset{\sim}{u} + \underset{\sim}{u} \times \operatorname{rot} \underset{\sim}{v} + \underset{\sim}{v} \times \operatorname{rot} \underset{\sim}{u},$$

(10.20.8) $$\operatorname{div} \nabla f = \Delta f,$$

(10.20.9) $$\operatorname{rot} \nabla f = \underset{\sim}{0},$$

(10.20.10) $$\operatorname{div} \operatorname{rot} \underset{\sim}{v} = 0,$$

(10.20.11) $$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \underset{\sim}{v} = \nabla \operatorname{div} \underset{\sim}{v} - \Delta\underset{\sim}{v},$$

(10.20.12) $$\operatorname{rot} \operatorname{div} \underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{0},$$

(10.20.13) $$\operatorname{rot} \nabla\underset{\sim}{v}^T = \nabla \operatorname{rot} \underset{\sim}{v},$$

(10.20.14) $$\operatorname{grad} (\operatorname{ant} \nabla\underset{\sim}{v}) = \underset{\sim}{0},$$

(10.20.15) $$\operatorname{div} \operatorname{rot} \underset{\sim}{H} = \operatorname{rot} \operatorname{div} \underset{\sim}{H}^T,$$

(10.20.16) $$\operatorname{div} (\operatorname{rot} \underset{\sim}{H}^T) = \underset{\sim}{0},$$

(10.20.17) $$(\text{rot rot } \underset{\sim}{H})^T = \text{rot rot } \underset{\sim}{H}^T,$$

(10.20.18) $$\text{rot}(f\,\underset{\sim}{1}) = -(\text{rot } (f\,\underset{\sim}{1}))^T,$$

(10.20.19) $$\text{div}(\underset{\sim}{H}^T\underset{\sim}{v}) = \underset{\sim}{v}\cdot\text{div } \underset{\sim}{H} + \underset{\sim}{H}\cdot\nabla\underset{\sim}{v}.$$

Se $\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{S}$ é um tensor simétrico, temos

(10.20.20) $$\text{tr}(\text{rot } \underset{\sim}{S}) = 0,$$

(10.20.21) $$\text{rot rot } \underset{\sim}{S} = -\Delta\underset{\sim}{S} + 2\hat{\nabla}\ \text{div } \underset{\sim}{S} - \nabla\nabla(\text{tr } \underset{\sim}{S}) + 1(\Delta(\text{tr } \underset{\sim}{S}) - \text{div div } \underset{\sim}{S}).$$

Se $\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{G} - \underset{\sim}{1}\ \text{tr } \underset{\sim}{G}$, temos

(10.20.22) $$\text{rot rot } \underset{\sim}{S} = -\Delta\underset{\sim}{G} + 2\hat{\nabla}\ \text{div } \underset{\sim}{G} - \underset{\sim}{1}\ \text{div div } \underset{\sim}{G}.$$

Se $\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{W}$ é antissimétrico e $\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{w} = \text{vet } \underset{\sim}{W}$, temos

(10.20.23) $$\text{rot } \underset{\sim}{W} = \underset{\sim}{1}\ \text{div } \underset{\sim}{w} - \nabla\underset{\sim}{w}.$$

Em geral, essas fórmulas podem ser deduzidas com mais facilidade representando os tensores por seus componentes cartesianos e usando as relações (5.1.5) a (5.1.8) entre os componentes ϵ_{ijk} e δ_{ij}. Por exemplo, para verificar (10.20.3), temos

(10.20.24)
$$\begin{aligned}(\text{rot } \underset{\sim}{v}\times\underset{\sim}{u})_i &= \epsilon_{ijk}\,\epsilon_{jpq}\,\partial_p\,v_q\,u_k = \\ &= \epsilon_{kij}\,\epsilon_{pqj}\,\partial_p\,v_q\,u_k = \\ &= (\delta_{kp}\,\delta_{iq} - \delta_{kq}\,\delta_{ij})\partial_p\,v_q\,u_k = \\ &= u_k\,\partial_k\,v_i - \partial_i\,v_k\,u_k.\end{aligned}$$

10.21 - Gradiente de função vetorial de um tensor.

Consideremos as funções $f: D_{\mathbb{L}} \to V$ definidas por $\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{T})$. O diferencial total, definido como em (10.7.6) é uma função de valor em V linear no ponto $\underset{\sim}{T}$ em relação ao incremento $\underset{\sim}{C}$.

O gradiente $\nabla \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{T})$, definido por

$$\delta \underset{\sim}{v} = f'(\underset{\sim}{T},\underset{\sim}{C}) = \nabla f(\underset{\sim}{T})\underset{\sim}{C} = \frac{\partial \underset{\sim}{f}}{\partial \underset{\sim}{T}}(\underset{\sim}{T})\underset{\sim}{C} \tag{10.21.1}$$

é a função linear $\nabla \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{T}): \mathbb{L} \to V$. Como função de $\underset{\sim}{T}$ o gradiente é simbolizado por $\nabla \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{T}): D_{\mathbb{L}} \to \mathbb{L}(\mathbb{L},V)$.

Os componentes do diferencial total são dados por

$$\underset{\sim}{f}'(\underset{\sim}{T},\underset{\sim}{C})\cdot\underset{\sim}{e}_k = f'(\underset{\sim}{T},\underset{\sim}{C})_k \tag{10.21.2}$$

e as derivadas parciais de $\underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{T})$ por

$$f'(\underset{\sim}{T},\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j)_k = (\nabla \underset{\sim}{f}(\underset{\sim}{T})\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j)\cdot\underset{\sim}{e}_k = \tag{10.21.3}$$

$$= \frac{\partial}{\partial T_{ij}} f(\underset{\sim}{T})_k = f(\underset{\sim}{T})_{k,ij}.$$

10.22 - Gradiente de função tensorial de um tensor.

O gradiente de uma função $\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T})$ é definido por

$$\delta \underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{F}'(\underset{\sim}{T},\underset{\sim}{C}) = \nabla \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T})\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{\mathbb{C}}(\underset{\sim}{T})\underset{\sim}{C} \tag{10.22.1}$$

onde $\nabla \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T}) = \underset{\sim}{\mathbb{C}}(\underset{\sim}{T})$ é o tensor gradiente, de quarta ordem, simbolizado por $\underset{\sim}{\mathbb{C}}(\underset{\sim}{T}): \mathbb{L} \to \mathbb{L}$. Como função do ponto $\underset{\sim}{T}$, $\underset{\sim}{\mathbb{C}}(\underset{\sim}{T}): D_{\mathbb{L}} \to L(\mathbb{L},\mathbb{L})$ simboliza uma função cujo valor é um vetor

do espaço vetorial $L(\mathbb{L},\mathbb{L})$ de 81 componentes.

Os componentes do diferencial total são dados por

$$(10.22.2) \qquad F'(\underset{\sim}{T},\underset{\sim}{C})\cdot\underset{\sim}{e}_i \otimes \underset{\sim}{e}_j = F'(\underset{\sim}{T},\underset{\sim}{C})_{ij}$$

e as derivadas parciais de $\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T})$ por

$$(10.22.3) \qquad F'_{ij}(\underset{\sim}{T},\underset{\sim}{e}_k \otimes \underset{\sim}{e}_m) = \frac{\partial}{\partial T_{km}} F(\underset{\sim}{T})_{ij} = F(\underset{\sim}{T})_{ij,km} .$$

Se o domínio de $\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T})$ é o espaço vetorial $\mathbb{S}$ dos tensores simétricos $T = S$, devemos antes de calcular $\partial F_{ij}/\partial T_{km}$, estender $\underset{\sim}{F}$ definindo

$$(10.22.4) \qquad \underset{\sim}{F}^S(\underset{\sim}{T}) = \underset{\sim}{F}\left(\frac{1}{2}(\underset{\sim}{T} + \underset{\sim}{T}^T)\right)$$

para $\underset{\sim}{T} \in \mathbb{L}$ e depois diferenciar $\underset{\sim}{F}$ como no caso de funções de valor escalar.

Em $(10.22.1)_2$, a função tensorial $\nabla\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T},\underset{\sim}{C})$ de duas variáveis tensoriais $\underset{\sim}{T}$ e $\underset{\sim}{C}$ é linear em $\underset{\sim}{C}$, mas não necessariamente linear em $\underset{\sim}{T}$. Se $\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T})$ é uma função isotrópica, então $\nabla\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{T},\underset{\sim}{C})$ também é uma função isotrópica.

Gradientes parciais de funções tensoriais de diversas variáveis podem ser obtidas de modo análogo ao das derivadas parciais de funções escalares de várias variáveis escalares desde que se obedeça a não-comutatividade do produto de tensores.

As seguintes fórmulas podem ser verificadas com facilidade:

$$(10.22.5) \qquad \frac{\partial \underset{\sim}{T}}{\partial \underset{\sim}{T}}(\underset{\sim}{C}) = \underset{\sim}{C},$$

$$(10.22.6) \qquad \frac{\partial \underset{\sim}{T}^T}{\partial \underset{\sim}{T}}(\underset{\sim}{C}) = \underset{\sim}{C}^T,$$

$$\frac{\partial \underset{\sim}{T}^m}{\partial \underset{\sim}{T}} (\underset{\sim}{G}) = \sum_{k=0}^{m-1} \underset{\sim}{T}^k \underset{\sim}{G} \underset{\sim}{T}^{m-1-k}, \qquad m > 0 \tag{10.22.7}$$

$$\frac{\partial \underset{\sim}{T}^{-1}}{\partial \underset{\sim}{T}} (\underset{\sim}{G}) = -\underset{\sim}{T}^{-1} \underset{\sim}{G} \underset{\sim}{T}^{-1}. \tag{10.22.8}$$

Nesas fórmulas, a função gradiente opera linearmente no tensor arbitrário $\underset{\sim}{G}$.

CAPÍTULO 11

INTEGRAL DE CAMPOS TENSORIAIS

11.1 - Teoremas integrais de campos tensoriais.

Consideremos os campos tensoriais $\mathfrak{T}: B \to \mathbb{Y}$ onde o domínio $B = D_{\mathbb{E}}$, chamado de corpo, é a imagem C^1 em $\mathbb{E}$ de um poliedro fechado cuja superfície regular simbolizada por ∂B é o contorno do corpo. Seja $\underset{\sim}{n}$ um versor externo ao corpo e normal ao contorno no ponto $x \in \partial B$. O teorema da divergência pode ser expresso na forma geral

$$(11.1.1) \qquad \int_{\partial B} \mathfrak{T}_{ijk\ldots}\, n_\alpha \, da = \int_B \frac{\partial \mathfrak{T}_{ijk\ldots}}{\partial x_\alpha} \, dv,$$

onde $\mathfrak{T}_{ijk\ldots}$ são funções componentes de classe C^2, o integrando do segundo membro é seccionalmente contínuo e da e dv são, respectivamente, elementos do contorno ∂B e do corpo B. O índice α dos componentes do versor $\underset{\sim}{n}$ e das coordenadas do ponto $\underset{\sim}{x}$ pode ou não ser igual a um dos índices $i,j,k,\ldots$ que indicam os componentes do campo tensorial $\underset{\sim}{\mathfrak{T}}$. A coincidência de índices implica em somatório.

Da expressão geral (11.1.1) podemos tirar inúmeros casos particulares dos quais, os mais importantes são os que pertencem à classe em que α é igual a um dos índices da função componente.

Por exemplo, se $\mathfrak{T}$ é um campo escalar $f = f(\underset{\sim}{x})$, temos:

(11.1.2) $$\int_{\partial B} f\, n_\alpha \, da = \int_B \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}\, dv,$$

ou,

(11.1.3) $$\int_{\partial B} f\, \underset{\sim}{n}\, da = \int_B \nabla f\, dv.$$

No caso de campo vetorial $\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{v}(\underset{\sim}{x})$,

(11.1.4) $$\int_{\partial B} v_i\, n_i \, da = \int_B \frac{\partial v_i}{\partial x_i}\, dv\ ,$$

ou,

(11.1.5) $$\int_{\partial B} \underset{\sim}{v}\cdot\underset{\sim}{n}\, da = \int_B \operatorname{div} \underset{\sim}{v}\, dv.$$

Se $\underset{\sim}{\mathfrak{F}}$ é um campo tensorial $\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{H}(\underset{\sim}{x})$, temos:

(11.1.6) $$\int_{\partial B} H_{ij}\, n_j \, da = \int_B \frac{\partial H_{ij}}{\partial x_j}\, dv\ ,$$

ou,

(11.1.7) $$\int_{\partial B} \underset{\sim}{H}\, \underset{\sim}{n}\, da = \int_B \operatorname{div} \underset{\sim}{H}\, dv\ .$$

Se o valor da função $\mathfrak{F}_{ij}$ é $\epsilon_{ijk}\, v_k$, temos

(11.1.8) $$\int_{\partial B} \epsilon_{ijk}\, v_k\, n_j \, da = \int_B \epsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j}\, dv\ ,$$

ou,

(11.1.9) $$\int_{\partial B} \underset{\sim}{n}\times\underset{\sim}{v}\, da = \int_B \operatorname{rot} \underset{\sim}{v}\, dv\ .$$

De (11.1.8) obtemos

(11.1.10) $$\int_{\partial B} \underset{\sim}{v} \otimes \underset{\sim}{n}\, da = \int_B \nabla \underset{\sim}{v}\, dv\ ;$$

que é um exemplo de (11.1.1) que não pertence à classe dos índices iguais.

Pondo em (11.1.5) $\underset{\sim}{v} = \psi\nabla\phi$, onde ψ e ϕ são funções escalares, temos

$$\int_{\partial B} \psi\nabla\phi \cdot \underset{\sim}{n}\, da = \int_B \operatorname{div}(\psi\nabla\phi)\, dv, \tag{11.1.11}$$

onde, de acordo com (10.20.4),

$$\operatorname{div}(\psi\nabla\phi) = \nabla\psi \cdot \nabla\phi + \psi\Delta\phi \cdot \tag{11.1.12}$$

Então,

$$\int_{\partial B} \psi\nabla\phi \cdot \underset{\sim}{n}\, da = \int_B (\nabla\psi \cdot \nabla\phi + \psi\Delta\phi)\, dv. \tag{11.1.13}$$

Analogamente, temos

$$\int_{\partial B} \phi\nabla\psi \cdot \underset{\sim}{n}\, da = \int_B (\nabla\phi \cdot \nabla\psi + \phi\Delta\psi)\, dv. \tag{11.1.14}$$

Subtraindo essas duas últimas equações, temos

$$\int_{\partial B} (\psi\nabla\phi - \phi\nabla\psi) \cdot \underset{\sim}{n}\, da = \int_B (\psi\Delta\phi - \phi\Delta\psi)\, dv. \tag{11.1.15}$$

As equações (11.1.13) e (11.1.15) são expressões do <u>teorema de Green</u>.

Todos esses casos particulares de (11.1.1) têm a mesma interpretação: a integral da razão de variação de um tensor em uma região de $\mathbb{E}$, razão essa que é medida em cada ponto pelo gradiente, divergência, rotacional ou laplaciano do tensor, é igual a uma integral desse tensor sobre o contorno do corpo que ocupa a região. Na chamada <u>fórmula da divergência</u> (11.1.5), a razão de variação do vetor $\underset{\sim}{v}$ na região B considerada é medida em cada ponto pela divergência e, a integral do componente normal do campo vetorial sobre a superfície ∂B é chamada de <u>fluxo</u> do vetor através da superfície.

11.2 - Teorema de Stokes.

Inicialmente, de acordo com (10.4.2), definimos uma curva no domínio $B = D_{\mathbb{E}}$ do campo tensorial $\underset{\sim}{\mathfrak{T}}$ como a função $\underset{\sim}{x}: [a,b] \to D_{\mathbb{E}}$, $a,b \in \mathbb{R}$. A curva é fechada quando $\underset{\sim}{x}(a) = \underset{\sim}{x}(b)$.

Seja em $B = D_{\mathbb{E}}$ uma calota cuja superfície regular S é limitada por uma curva fechada C. O teorema de Stokes pode ser expresso na forma geral

$$(11.2.1) \qquad \int_C \mathfrak{T}_{ij\ldots}\, dx_i = \int_S \epsilon_{pqr}\, \partial_q\, \mathfrak{T}_{rj\ldots}\, n_p\, da,$$

onde dx_i são os componentes do vetor tangente $d\underset{\sim}{x}$ com ponto de aplicação em C, da é elemento de S, n_p são os componentes do versor $\underset{\sim}{n}$ normal a da e as funções componentes $\mathfrak{T}_{ij\ldots}$ são de classe C^1 em B. A integral do primeiro membro de (11.2.1) é chamada de circulação do campo tensorial $\underset{\sim}{\mathfrak{T}}$ ao longo da curva C.

Se o campo é vetorial,

$$(11.2.2) \qquad \int_C v_i\, dx_i = \int_S \epsilon_{pqr}\, \partial_q\, v_r\, n_p\, da,$$

i.e.,

$$(11.2.3) \qquad \int_C \underset{\sim}{v} \cdot d\underset{\sim}{x} = \int_S (\mathrm{rot}\ \underset{\sim}{v}) \cdot \underset{\sim}{n}\, da.$$

Essa expressão clássica do teorema de Stokes diz que a circulação do campo vetorial $\underset{\sim}{v}(\underset{\sim}{x})$ ao longo de C é igual ao fluxo do rotacional desse campo através da calota limitada por C. Se S é uma superfície fechada, então,

$$(11.2.4) \qquad \int_S (\mathrm{rot}\ \underset{\sim}{v}) \cdot \underset{\sim}{n}\, da = 0.$$

Pondo em (11.2.1) $\mathcal{F}_{ij\ldots} = f\,\delta_{ij}$ onde $f = f(\underset{\sim}{x})$ é um campo escalar, temos

$$\int_C f\,d\underset{\sim}{x} = \int_S (n\times\nabla f)\,da. \tag{11.2.5}$$

Se em (11.2.1) $\mathcal{F}_{ij\ldots} = \epsilon_{ijk}\,v_j$, temos

$$\int_C d\underset{\sim}{x}\times\underset{\sim}{v} = \int_S (\nabla\underset{\sim}{v}^T\cdot\underset{\sim}{n} - \underset{\sim}{n}\,\mathrm{div}\,\underset{\sim}{v})\,da. \tag{11.2.6}$$

Pondo $\mathcal{F}_{ij\ldots} = H_{ij}$, obtemos de (11.2.1) a fórmula

$$\int_C H^T\,dx = \int_S (\mathrm{rot}\,H)^T n\,da. \tag{11.2.7}$$

11.3 - Campos tensoriais irrotacionais.

Os campos considerados são todos suficientemente suaves em seus domínios simplesmente conexos e os seus gradientes também são suaves.

Um campo vetorial irrotacional $\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{v}(\underset{\sim}{x})$ satisfaz a equação

$$\mathrm{rot}\,\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{0}. \tag{11.3.1}$$

Em conseqüência existe um campo escalar $f = f(\underset{\sim}{x})$ tal que

$$v = \nabla f, \tag{11.3.2}$$

e o teorema de Stokes na forma clássica (11.2.3) mostra que

$$\int_C \underset{\sim}{v}\cdot d\underset{\sim}{x} = 0, \tag{11.3.3}$$

i.e., que a circulação do campo é nula. A função $f = f(\underset{\sim}{x})$ é

chamada de <u>potencial escalar</u> do campo vetorial. Esses campos admitem <u>superfícies equipotenciais</u> ou <u>superfícies de nível</u> que em cada ponto são perpendiculares ao vetor ∇f.

No caso de campo tensorial irrotacional,

(11.3.4) $$\text{rot } \underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{0}$$

implica na existência de um campo vetorial tal que

(11.3.5) $$\underset{\sim}{H} = \nabla \underset{\sim}{v}.$$

Se nesse campo $\text{tr } \underset{\sim}{H} = 0$ então, existe um campo tensorial antissimétrico $\underset{\sim}{W} = \underset{\sim}{W}(\underset{\sim}{x})$ tal que

(11.3.6) $$\underset{\sim}{H} = \text{rot } \underset{\sim}{W}.$$

11.4 - <u>Campos tensoriais solenoidais</u>.

Um campo vetorial solenoidal satisfaz a relação

(11.4.1) $$\int_S \underset{\sim}{v} \cdot \underset{\sim}{n} \, da = 0,$$

onde S é uma superfície fechada regular. Em conseqüência, existe um campo vetorial $\underset{\sim}{u}$ tal que

(11.4.2) $$\underset{\sim}{v} = \text{rot } \underset{\sim}{u}.$$

Resulta também da fórmula da divergência (11.1.5) que,

(11.4.3) $$\text{div } \underset{\sim}{v} = 0.$$

De (11.4.1) vemos que o fluxo de um campo solenoidal através da superfície fechada S é nulo.

No caso de campo tensorial solenoidal,

$$\int_S \underset{\sim}{H}^T \underset{\sim}{n}\, da = \underset{\sim}{0}, \tag{11.4.4}$$

em qualquer superfície fechada regular S. Resulta então que existe um campo tensorial $\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{T}(\underset{\sim}{x})$ tal que

$$\underset{\sim}{H} = \text{rot}\ \underset{\sim}{T}. \tag{11.4.5}$$

11.5 - Campos tensoriais harmônicos.

Dizemos que um campo tensorial $\mathfrak{F}: D_{\mathbb{E}} \to \mathbb{Y}$ é um campo harmônico em $D_{\mathbb{E}}$, se

$$\Delta \underset{\sim}{\mathfrak{F}} = 0. \tag{11.5.1}$$

No caso de campo vetorial, se ambos

$$\text{div}\ \underset{\sim}{v} = 0, \tag{11.5.2}$$

$$\text{rot}\ \underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{0}, \tag{11.5.3}$$

então, o campo $\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{v}(\underset{\sim}{x})$ é harmônico.

11.6 - Teorema de Helmholtz.

Se $\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{v}(\underset{\sim}{x})$ é um campo vetorial suficientemente suave, então, existe um campo escalar $f = f(\underset{\sim}{x})$ e um campo vetorial

$\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{u}(\underset{\sim}{x})$, tais que

(11.6.1) $$\underset{\sim}{v} = \nabla f + \mathrm{rot}\ \underset{\sim}{u}$$

e

(11.6.2) $$\mathrm{div}\ \underset{\sim}{u} = 0.$$

I 199